И. В. Бойков

ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ СИНГУЛЯРНЫХ И ГИПЕРСИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Монография

Часть вторая

ГИПЕРСИНГУЛЯРНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Издательство
Пензенского государственного
университета

Пенза 2009

УДК 517.392
Б 77

Рецензенты:
Кафедра “Прикладная математика”
государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования
“Политехнический институт. Сибирский федеральный университет”;
Доктор физико-математических наук,
профессор, заведующий кафедрой “Математика и инженерная графика”
государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования
“Пензенский артиллерийский инженерный институт”
О. А. Голованов

Бойков, И. В.
Б 77 Приближенные методы вычисления сингулярных и гиперсингулярных интегралов: Монография. Часть вторая. Гиперсингулярные интегралы / Монография/ И. В. Бойков.– Пенза : Изд-во Пенз. гос. ун-та, 2009. – 252 с.

ISBN 978-5-94170-279-4

Монография является второй частью книги “Приближенные методы вычисления сингулярных и гиперсингулярных интегралов.” В первой части изложены оптимальные по точности и сложности методы вычисления одномерных сингулярных интегралов, полисингулярных интегралов, многомерных сингулярных интегралов на различных классах функций.

Вторая часть книги посвящена построению приближенных методов вычисления гиперсингулярных интегралов, полигиперсингулярных интегралов, многомерных гиперсингулярных интегралов. Для вычисления гиперсингулярных интегралов на ряде классов функций получены оптимальные по точности квадратурные и кубатурные формулы. Исследована гладкость сопряженных функций, представимых гиперсингулярными интегралами, вычислены поперечники Колмогорова и Бабенко сопряженных функций и построены оптимальные по порядку методы восстановления сопряженных функций.

Книга адресована математикам, механикам и физикам, которые в своих предметных областях сталкиваются с необходимостью вычисления сингулярных и гиперсингулярных интегралов, а также аспирантам и студентам специальностей “Математика”, “Прикладная математика”, “Механика”.

ISBN 978-5-94170-279-4

УДК 517.392

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Решение задачи Коши для дифференциальных уравнений в частных производных гиперболического типа привело Жака Адамара к введению сингулярных интегралов особого вида [1], [91]. Позднее они получили название интегралов в смысле Адамара или интегралов Адамара. Помимо уравнений гиперболического типа интегралы Адамара находят широкое применение в теории упругости, электродинамике, аэродинамике [6], [7], [37], [62], [64], [72], [93] и ряде других важных областей механики и физики. При этом наряду с определением, предложенным Жаком Адамаром, в математическую литературу были введены и другие типы сингулярных интегралов, имеющих особенность более высокого порядка, нежели размерность области интегрирования. Все эти интегралы получили название гиперсингулярных интегралов. Точное вычисление гиперсингулярных интегралов возможно только в исключительных случаях, поэтому возникает необходимость в разработке приближенных методов вычисления.

В последние десять-пятнадцать лет отмечается устойчиво возрастающий интерес к проблематике, связанной с применением гиперсингулярных интегралов, а в связи с этим и к задачам их вычисления. Обзоры методов вычисления гиперсингулярных интегралов, известных к 2001 г., содержатся в [24], [75], [98], [103].

В предлагаемой читателю монографии сделана попытка отразить современное состояние методов вычисления гиперсингулярных интегралов. Она является второй частью монографии автора "Приближенные методы вычисления сингулярных и гиперсингулярных интегралов," первая часть которой вышла из печати в 2005 г.

Вторая часть состоит из шести глав. В первой главе дается обзор приближенных методов вычисления гиперсингулярных интегралов, приводятся постановки задач построения оптимальных методов вычисления гиперсингулярных интегралов и восстановления сопряженных функций, представимых гиперсингулярными интегралами; описываются классы функций, для которых строятся оптимальные алгоритмы.

Вторая глава посвящена исследованию гладкости сопряженных функций, представимых гиперсингулярными интегралами.

В третьей главе излагаются оптимальные алгоритмы вычисления гиперсингулярных интегралов с ядрами Гильберта и Коши.

В четвертой главе исследуются методы построения оптимальных кубатурных формул вычисления полигиперсингулярных интегралов с ядрами Гильберта и Коши.

В пятой главе исследуются методы вычисления многомерных гиперсингулярных интегралов.

В шестой главе изложены методы наилучшего приближения сопряженных функций, представимых в виде гиперсингулярных интегралов.

Книга, в первую очередь, адресована специалистам в области вычислительной математики, физики и механики. Она также может быть полезна инженерам-исследователям, которые в своих предметных областях сталкиваются с необходимостью вычисления гиперсингулярных интегралов.

Отдельные параграфы книги могут быть использованы в качестве учебного пособия по дисциплинам "Квадратурные формулы"и "Граничные интегральные уравнения"для студентов специальности "Прикладная математика".

Исследования автора по приближенным методам вычисления сингулярных и гиперсингулярных интегралов были поддержаны Российским фондом фундаментальных исследований (гранты 94-01-00653, 97-01-00621), Министерством образования РФ (гранты по вычислительной математике 1994 – 1996 гг. и 1998 – 2000 гг.), Федеральным агентством по образованию (2005 г., регистрационный номер 0120.0502705).

Глава 1

ВВЕДЕНИЕ

1. Определение интегралов Адамара

1.1. Одномерные интегралы в смысле Адамара

В работе [91] Ж. Адамар ввел новый тип особых интегралов.

Определение 1.1 [1], [91]. Интеграл вида

$$\int_a^b \frac{A(x)\,dx}{(b-x)^{p+\alpha}} \tag{1.1}$$

при целом p и $0 < \alpha < 1$ определяет величину ("конечную часть") рассматриваемого интеграла как предел при $x \to b$ суммы

$$\int_a^x \frac{A(t)\,dt}{(b-t)^{p+\alpha}} + \frac{B(x)}{(b-x)^{p+\alpha-1}},$$

если предположить, что $A(x)$ имеет p производных в окрестности точки b. Здесь $B(x)-$ любая функция, на которую налагаются два условия:

а) рассматриваемый предел существует;

б) $B(x)$ имеет, по крайней мере, p производных в окрестности точки $x = b$.

Произвольный выбор $B(x)$ никак не влияет на значение получаемого предела: условие а) определяет значения $p-1$ первых производных от $B(x)$ в точке b, так что произвольный добавочный член в числителе есть бесконечно малая величина, по меньшей мере порядка $(b-x)^p$.

Замечание. В книге [2] Ж. Адамар увлекательно рассказывает о различных сторонах творческого процесса при решении математических проблем и, в частности, останавливается (с. 104) на открытии им гиперсингулярных интегралов.

Ж. Адамар назвал этот предел "конечной частью" интеграла и обозначил

$$\left|\overline{\int_a^b}\right. \frac{A(x)\,dx}{(b-x)^{p+\alpha}}.$$

Знак $\left|\overline{\int_a^b}\right.$ означает конечную часть интеграла. В современной литературе чаще встречаются другие обозначения интеграла Адамара:

$$\fint\limits_a^b \frac{A(x)\,dx}{(b-x)^{p+\alpha}}$$

и

$$\int\limits_a^b \frac{A(x)\,dx}{(b-x)^{p+\alpha}}.$$

В данной работе используется последнее обозначение интеграла Адамара, так как из контекста всегда ясно, является ли данный интеграл регулярным, сингулярным или гиперсингулярным.

Нетрудно убедиться в возможности распространения простейших свойств интегралов в смысле Римана на интегралы в смысле Адамара, вводимые определением 1.1. Очевидно, что справедливы формулы

$$\int\limits_a^b \frac{Aa(x)}{(b-x)^{p+\alpha}}dx = A\int\limits_a^b \frac{a(x)}{(b-x)^{p+\alpha}}dx, \qquad A = \text{const};$$

$$\int\limits_a^b \frac{a(x)+b(x)}{(b-x)^{p+\alpha}}dx = \int\limits_a^b \frac{a(x)}{(b-x)^{p+\alpha}}dx + \int\limits_a^b \frac{b(x)}{(b-x)^{p+\alpha}}dx;$$

$$\int\limits_a^b \frac{a(x)}{(b-x)^{p+\alpha}}d\tau = \int\limits_a^c \frac{a(x)}{(b-x)^{p+\alpha}}dx + \int\limits_c^b \frac{a(x)}{(b-x)^{p+\alpha}}dx, a < c < b,$$

и некоторые другие.

В частности, в монографии [1] отмечается, что в интегралах Адамара вида (1.1) можно делать замену переменных $x = \varphi(\tau)$ при условии, что функция $\varphi(\tau)$ имеет отличную от нуля производную в окрестности точки b (включая точку b).

Использование других, привычных для интегралов Римана, свойств требует осторожности.

Например, к интегралам в смысле Адамара неприменимы стандартные теоремы об оценке модуля определенного интеграла, так как для оценки модуля интеграла Адамара недостаточно знания модуля подынтегральной функции $A(x)$.

Один из способов вычисления интеграла Адамара заключается в следующем. Представим интеграл (1.1) в виде

$$\int\limits_a^b \frac{A(x)\,dx}{(b-x)^{p+\alpha}} = \int\limits_a^b \frac{A_1(x)\,dx}{(b-x)^{p+\alpha}} +$$

$$+\int\limits_a^b \left(A(b)+\frac{A'(b)}{1!}(x-b)+\ldots+\frac{A^{(p-1)}(b)(x-b)^{p-1}}{(p-1)!}\right)\frac{dx}{(b-x)^{p+\alpha}}, \quad (1.2)$$

где

$$A_1(x)=A(x)-A(b)-\frac{A'(b)}{1!}(x-b)-\ldots-\frac{A^{(p-1)}(b)(x-b)^{p-1}}{(p-1)!}.$$

Вычисляя второй из интегралов, стоящих в правой части (1.2) по определению 1.1, в котором

$$B(x)=-\frac{A(b)}{p+\alpha-1}+\frac{A'(b)(b-x)}{(p+\alpha-2)1!}+\ldots+\frac{(-1)^pA^{(p-1)}(b)(b-x)^{p-1}}{\alpha(p-1)!},$$

имеем

$$\int\limits_a^b\frac{A(x)\,dx}{(b-x)^{p+\alpha}}=-\frac{A(b)}{(p+\alpha-1)(b-a)^{p+\alpha-1}}-\ldots-\frac{(-1)^{p-1}A^{(p-1)}(b)}{(p-1)!\alpha(b-a)^{\alpha}}+$$

$$+\int\limits_a^b\frac{A_1(x)\,dx}{(b-x)^{p+\alpha}}.$$

Данное Адамаром определение конечной части расходящегося интеграла является частным случаем общего понятия регуляризации расходящихся интегралов.

Опишем регуляризацию расходящихся интегралов, следуя [40].

Определение 1.2 [40]. Множество K всех вещественных функций $\varphi(x)$ $(x=(x_1,\ldots,x_n))$, каждая из которых имеет непрерывные производные всех порядков и финитна, т. е. обращается в нуль вне некоторой ограниченной области (своей для каждой функции $\varphi(x)$), называется основным пространством. Сами функции $\varphi(x)$ называются основными.

Определение 1.3 [40]. Последовательность основных функций $\varphi_1(x),\varphi_2(x),\ldots,\varphi_n(x),\ldots$ стремится к нулю в пространстве K, если все эти функции обращаются в нуль вне одной и той же ограниченной области и равномерно сходятся к нулю (в обычном смысле) так же, как и их производные любого порядка.

Определение 1.4 [40]. Линейный непрерывный функционал f задан на основном пространстве K, если указано правило, в силу которого каждой основной функции $\varphi(x)$ сопоставлено некоторое число (f,φ) и при этом выполнены следующие условия:

а) для любых двух вещественных чисел α_1, α_2 и любых двух основных функций $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ имеет место равенство

$$(f, \alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2) = \alpha_1(f, \varphi_1) + \alpha_2(f, \varphi_2);$$

б) если последовательность основных функций $\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \ldots$ стремится к нулю в пространстве K, то последовательность чисел (f, φ_1), $\ldots, (f, \varphi_n), \ldots$ сходится к нулю.

Если $f(x)$ локально интегрируемая в R_n, то можно определить линейный функционал

$$(f, \varphi) = \int\limits_{R_n} f(x)\varphi(x)\, dx. \tag{1.3}$$

Далеко не все линейные функционалы представимы в виде (1.3). В частности, дельта-функция не представима в виде (1.3). Линейные функционалы, представимые в виде (1.3), называются регулярными, все остальные – сингулярными.

Определение 1.5 [40]. Обобщенной функцией называется каждый линейный непрерывный функционал, определенный на основном пространстве K.

Определение 1.6 [40]. Совокупность всех обобщенных функций обозначается через K'.

Распространим функционал (1.3) на функции, локально интегрируемые всюду за исключением конечного числа точек. Для определенности ограничимся случаем, когда $f(x)$ – функция, локально интегрируемая всюду, кроме точки x_0, в которой она имеет неинтегрируемую особенность. Тогда интеграл (1.3), где $\varphi(x)$ – основная функция, в общем случае расходится. Но он сходится, если $\varphi(x)$ равна нулю в окрестности точки x_0. Возникает проблема построения функционала $f \in K'$, который на основные функции $\varphi(x)$, неравные нулю в окрестности точки x_0, действует по формуле (1.3). Всякий такой функционал f называется регуляризацией расходящегося интеграла (1.3), или регуляризацией функции $f(x)$.

Результаты различных регуляризаций различаются на константу.

Теорема 1.1 [40]. Если f_0 – частное решение проблемы регуляризации интеграла (1.3), то общее решение f получается прибавлением к f_0 любого функционала, сосредоточенного в точке x_0.

Вопрос о выборе среди многочисленных регуляризаций данной функции естественной ее регуляризации обсуждается в § 3 главы 1 книги [40].

Мы не останавливаемся на этом вопросе, так как на протяжении всей работы рассматриваются только интегралы Адамара и их естественные обобщения.

По этой же причине здесь не обсуждается вопрос о регуляризации функций со степенными особенностями аналитическим продолжением по параметру. Эта регуляризация подробно исследована в [40].

В работе Л. А. Чикина [71] дано определение интеграла типа Коши – Адамара, обобщающее понятия интеграла в смысле главного значения Коши и интеграла в смысле Адамара.

Определение 1.7 [71]. Интегралом

$$\int\limits_a^b \frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{(\tau-c)^p}, \quad a < c < b,$$

в смысле главного значения Коши – Адамара будем называть следующий предел:

$$\int\limits_a^b \frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{(\tau-c)^p} = \lim_{v\to 0}\left[\int\limits_a^{c-v} \frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{(\tau-c)^p} + \int\limits_{c+v}^b \frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{(\tau-c)^p} + \frac{\xi(v)}{v^{p-1}}\right],$$

где $\xi(v)$ – некоторая функция, выбранная так, чтобы указанный предел существовал.

В концевых точках a и b гиперсингулярный интеграл может быть определен следующим образом.

Определение 1.8. Интегралом $\int\limits_a^b \frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{(\tau-a)^p}$ называется предел

$$\int\limits_a^b \frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{(\tau-a)^p} = \lim_{v\to 0}\left[\int\limits_{a+v}^b \frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{(\tau-a)^p} + \frac{\xi(v)}{v^{p-1}} + \xi_1(v)\ln|v|\right],$$

где $\xi(v)$– некоторая функция, имеющая непрерывные производные до $(p-1)$-го порядка, удовлетворяющие условию Дини – Липшица; $\xi_1(v)$– некоторая функция, удовлетворяющая условию Дини – Липшица в окрестности от нуля. Функции $\xi(v)$ и $\xi_1(v)$ выбираются так, чтобы указанный предел существовал.

В этом случае

$$\int\limits_a^b \frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{(\tau-a)^p} = -\sum_{k=0}^{p-2} \frac{\varphi^{(k)}(b)(p-k-2)!}{(b-a)^{p-1-k}(p-1)!} +$$

$$+\frac{\varphi^{(p-1)}(b)\ln(b-a)}{(p-1)!}-\int\limits_a^b\frac{\varphi^{(p)}(\tau)\ln(\tau-a)}{(p-1)!}d\tau.$$

Разлагая функцию $\varphi(\tau)$ по формуле Тейлора с остаточным членом в интегральной форме и используя определения 1.1 и 1.8, имеем:
при $p\in N=\{1,2,\dots\}$

$$\int\limits_a^b\frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{(\tau-a)^p}=\sum_{k=0}^{p-2}\frac{\varphi^{(k)}(a)(b-a)^{k+1-p}}{(k+1-p)k!}+$$

$$+\frac{\varphi^{(p-1)}(a)}{(p-1)!}\ln(b-a)+\int\limits_a^b\frac{1}{(\tau-a)^p}R_{p-1}(\tau,a)d\tau;$$

при $p\notin N$

$$\int\limits_a^b\frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{(\tau-a)^p}=\sum_{k=0}^{[p]-1}\frac{\varphi^{(k)}(a)(b-a)^{k+1-p}}{(k+1-p)k!}+$$

$$+\int\limits_a^b\frac{1}{(\tau-a)^p}R_{p-1}(\tau,a)d\tau,$$

где

$$R_{p-1}(\tau,a)=\frac{1}{p!}\int\limits_a^\tau(\tau-t)^{p-1}\varphi^{(p)}(t)dt.$$

Дадим, следуя [54], еще одно определение гиперсингулярных интегралов, которое может быть полезным при интегрировании по кривым с угловыми точками в комплексной области.

Предварительно приведем несколько определений, которые понадобятся ниже.

Следуя [44], назовем поверхностями Ляпунова области, ограниченные конечным числом замкнутых поверхностей, удовлетворяющим трем условиям Ляпунова:

1. В каждой точке поверхности существует определенная касательная плоскость и, следовательно, определенная нормаль;

2. Если θ есть угол между нормалями в точках m_1 и m_2 и r есть расстояние между этими точками, то

$$\theta<Ar^\lambda\,(0<\lambda\le1),\tag{1.4}$$

где A и $\lambda-$ вполне определенные числа;

3. Существует число d, одно и то же для всех точек поверхности и обладающее свойством: параллели к нормали в точке m поверхности пересекают не более чем в одной точке часть поверхности, находящуюся внутри сферы радиуса d и с центром в m.

Определение 1.9 [44]. Функция $f(x, y, z)$ принадлежит классу $H(s, A, \alpha) \quad (0 < \alpha \leq 1)$ в области D, если она в этой области ограничена и имеет ограниченные непрерывные производные порядка s, удовлетворяющие условию Гельдера с показателем α и константой A, т. е.

$$\left|\frac{\partial^r f}{\partial x^{r_1} \partial y^{r_2} \partial z^{r_3}}\right| \leq A, \tag{1.5}$$

где $r_1 + r_2 + r_3 = r, r = 0, 1, \ldots, s$, и для любой пары точек $m_1, m_2 \in \in D$, расстояние r_{12} между которыми меньше некоторого числа $r_0 \leq 1$, справедливо неравенство

$$\left|\left.\frac{\partial^s f}{\partial x^{s_1} \partial y^{s_2} \partial z^{s_3}}\right|_{m_1} - \left.\frac{\partial^s f}{\partial x^{s_1} \partial y^{s_2} \partial z^{s_3}}\right|_{m_2}\right| < A r_{12}^{\alpha}. \tag{1.6}$$

Пусть $S-$ поверхность Ляпунова и $N-$ внешняя нормаль к ней. Произвольную точку m_0 на S примем за начало местной декартовой системы координат (χ, η, ζ), направив ось ζ по нормали N_0 в точке m_0 и зафиксировав как-нибудь оси χ, η в касательной плоскости. В достаточно малой окрестности точки m_0 уравнение поверхности S в местной системе координат (χ, η, ζ) имеет вид

$$\zeta = F(\chi, \eta). \tag{1.7}$$

Определение 1.10 [44]. Поверхность S принадлежит классу $L_k(B, \alpha)$, если $F(\chi, \eta) \in H(k, B, \alpha)$ и константы B и α не зависят от выбора точки m_0.

Вернемся к определению гиперсингулярных интегралов на гладких кривых.

Пусть $(a, b)-$ достаточно гладкая дуга в комплексной плоскости. Рассмотрим интеграл вдоль нее:

$$(J_1\varphi)(a) = \int_a^b \frac{\varphi(\tau)}{(\tau - a)^{p+\alpha}} d\tau, \tag{1.8}$$

где p – целое число, $p = 1, 2, \ldots, 0 \leq \alpha < 1$.

Так как определение гиперсингулярного интеграла проводится при $\alpha = 0$ и при $\alpha \neq 0$ по одной и той же схеме, ограничимся рассмотрением первого случая.

Пусть $\alpha = 0$. Воспользуемся определением Адамара конечной части интеграла. Пусть t_1- точка, расположенная на дуге (a, b) на расстоянии ε_1 от точки a. Интеграл $(J_1\varphi)(a)$ определим как предел

$$(J_1\varphi)(a) = \lim_{t_1 \to a} \left[\int\limits_{t_1}^{b} \frac{\varphi(\tau)}{(\tau - a)^p} + \frac{B(t_1)}{(t_1 - a)^{p-1}} \right], \tag{1.9}$$

где функция $B(t)$ имеет производные до $(p-1)$-го порядка, причем $(p-1)$-я производная удовлетворяет условию Дини $-$ Липшица и выбирается таким образом, чтобы предел существовал.

Интегрируя по частям интеграл в (1.9), имеем

$$(J_1\varphi)(a) = \lim_{t_1 \to a} \left[\int\limits_{t_1}^{b} \frac{\varphi(\tau)}{(\tau - a)^p} d\tau + \frac{B(t_1)}{(t_1 - a)^{p-1}} \right] =$$

$$= \lim_{t_1 \to a} \left[\left[\frac{1}{(p-1)!} \varphi^{(p-1)}(\tau) \ln |\tau - a| - \right.\right.$$

$$\left. - \frac{1}{(p-1)!} \frac{\varphi^{(p-2)}(\tau)}{(\tau - a)} - \dots - \frac{1}{(p-1)} \frac{\varphi(\tau)}{(\tau - a)^{(p-1)}} \right] |_{t_1}^{b} -$$

$$\left. - \frac{1}{p!} \int\limits_{t_1}^{b} \varphi^{(p)}(\tau) \ln(\tau - a) d\tau + \frac{B(t_1)}{(t_1 - a)^{p-1}} \right]. \tag{1.10}$$

Полагая

$$\frac{B(t_1)}{(t_1 - a)^{(p-1)}} = - \left(\frac{1}{(p-1)!} \varphi^{(p-1)}(t_1) \ln |t_1 - a| - \frac{1}{(p-1)!} \frac{\varphi^{(p-2)}(t_1)}{t_1 - a} - \dots - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{(p-1)} \frac{\varphi(t_1)}{(t_1 - a)^{(p-1)}} \right), \tag{1.11}$$

приходим к следующему определению.

Определение 1.11 [54]. Интеграл $(J_1\varphi)(a)$ определяется выражением

$$(J_1\varphi)(a) = \int\limits_{a}^{b} \frac{\varphi(\tau)}{(\tau - a)^p} d\tau \equiv - \frac{1}{(p-1)!} \varphi^{(p-1)}(a) i\alpha_a +$$

$$+\frac{1}{(p-1)!}\varphi^{(p-1)}(b)\ln(b-a)-\frac{1}{(p-1)!}\frac{\varphi^{(p-2)}(b)}{(b-a)}-\cdots-$$
$$-\frac{1}{(p-1)(p-2)}\frac{\varphi'(b)}{(b-a)^{p-2}}-\frac{1}{(p-1)}\frac{\varphi(b)}{(b-a)^{p-1}}-$$
$$-\frac{1}{(p-1)!}\int\limits_a^b\varphi^{(p)}(\tau)\ln(\tau-a)d\tau, \qquad (1.12)$$

где α_a- предельное значение аргумента t_1-a при $t_1\to a$, т. е. угол, образованный касательной в точке a с осью x.

В случае, когда сингулярная точка находится на верхнем пределе интегрирования, аналогичным образом вводится и следующее определение.

Определение 1.12 [54]. Интеграл $(J_1\varphi)(b)$ определяется выражением

$$(J_1\varphi)(b)=\int\limits_a^b\frac{\varphi(\tau)}{(\tau-b)^p}d\tau\equiv\frac{1}{(p-1)!}\varphi^{(p-1)}(b)i\alpha_b-\frac{1}{(p-1)!}\varphi^{(p-1)}(a)\ln(b-a)+$$
$$+\frac{1}{(p-1)!}\frac{\varphi^{(p-2)}(a)}{(a-b)}+\cdots+$$
$$+\frac{1}{(p-1)(p-2)}\frac{\varphi'(a)}{(a-b)^{p+2}}+\frac{1}{(p-1)}\frac{\varphi(a)}{(a-b)^{(p-1)}}-$$
$$-\frac{1}{(p-1)!}\int\limits_a^b\varphi^{(p)}(\tau)\ln(\tau-b)d\tau, \qquad (1.13)$$

где α_b- угол, образованный касательной (в направлении движения) в точке b с осью x.

Рассмотрим интеграл

$$(J_1g)(t)=\int\limits_a^b\frac{g(\tau)}{(\tau-t)^p}d\tau, \quad t\in(a,b). \qquad (1.14)$$

Определение 1.13 [54]. Пусть $t\in(a,b)$ и пусть в точке t выполняются равенства $\varphi^{(j)}(t+0)=\varphi^{(j)}(t-0)=\varphi^{(j)}(t)$, $j=0,1,\ldots,p-1$. Интеграл $(J_1\varphi)(t)$ определяется выражением

$$(J_1\varphi)(t)=\int\limits_a^b\frac{\varphi(\tau)}{(\tau-t)^p}d\tau\equiv\frac{1}{(p-1)!}\varphi^{(p-1)}(t)i(\alpha_2-\alpha_1)+$$
$$+\frac{1}{(p-1)!}[\varphi^{(p-1)}(b)\ln(b-t)-\varphi^{(p-1)}(a)\ln(t-a)]-$$

$$-\frac{1}{(p-1)!}[\frac{\varphi^{(p-2)}(b)}{(b-t)}-\frac{\varphi^{(p-2)}(a)}{(a-t)}]-\cdots-$$

$$-\frac{1}{(p-1)(p-2)}[\frac{\varphi'(b)}{(b-t)^{p-2}}-\frac{\varphi'(a)}{(a-t)^{p-2}}]-$$

$$-\frac{1}{(p-1)}[\frac{g(b)}{(b-t)^{p-1}}-\frac{g(a)}{(a-t)^{p-1}}]-\frac{1}{(p-1)!}\int\limits_a^b[\varphi^{(p)}(\tau)\ln(\tau-t)]d\tau, \quad (1.15)$$

где α_1 и α_2– углы, образованные в точке t касательными к дуге (a,b) с осью x при движении по дуге от точки a к точке b.

1.2. Многомерные интегралы в смысле Адамара

Первое определение многомерных интегралов в смысле Адамара дано в монографиях [1], [91], где были определены интегралы вида

$$\int\int\int\limits_T \frac{A(x,y,z)}{(G(x,y,z))^{p+\alpha}}dxdydz,\ p=3,4,\ldots,\ 0<\alpha<1, \quad (1.16)$$

при условии, что область T является цилиндрической областью с нижним основанием S, расположенным на координатной плоскости $0XY$, и верхним основанием, являющимся поверхностью Ляпунова $G=0$. Предполагается, что поверхность G не содержит особых точек, т. е. ни в одной из ее точек первые частные производные G не обращаются в нуль одновременно.

Это определение интеграла Адамара можно распространить и на более общие случаи.

Пусть $T=[0,1]^2$, $p=1,2,\ldots$, $0<\alpha<1$. Рассмотрение интеграла

$$\int\int\limits_T \frac{A(x,y)dxdy}{x^{p+\alpha}y^{p+\alpha}} \quad (1.17)$$

начнем с того, что ограничим область интегрирования: $x\geq\varepsilon_1$, $y\geq\varepsilon_2$, обозначив через ε_1 и ε_2 два малых положительных числа. После этого интеграл можно сделать конечным, если вычислить интеграл (1.17) по частям и отбросить слагаемые, стремящиеся к бесконечности при стремлении ε_1 и ε_2 к нулю.

Введем область $T_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}=[\varepsilon_1,1;\varepsilon_2,1]$, $\varepsilon_1,\varepsilon_2>0$.

Определение 1.14. Пусть $p = 1, 2, \dots,\ 0 < \alpha < 1$. Конечной частью интеграла (1.17) называется предел

$$\int\limits_{T}\!\!\int \frac{A(x,y)dxdy}{x^{p+\alpha}y^{p+\alpha}} =$$

$$= \lim_{\varepsilon_1\to 0,\varepsilon_2\to 0}\left[\int\limits_{T_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}}\!\!\int \frac{A(x,y)dxdy}{x^{p+\alpha}y^{p+\alpha}} + \frac{B(\varepsilon_1,\varepsilon_2)}{\varepsilon_1^{p+\alpha-1}\varepsilon_2^{p+\alpha-1}}\right], \qquad (1.18)$$

в котором функция $B(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ имеет частные производные до $(2p-2)$-го порядка и подбирается таким образом, чтобы предел существовал.

Введем область $T_\varepsilon = [\varepsilon, 1; \varepsilon, 1]$, $\varepsilon > 0$.

Определение 1.15. Пусть $p = 2, 3, \dots$ Конечной частью интеграла $\int\limits_{T}\!\!\int \frac{A(x,y)dxdy}{x^p y^p}$ называется предел

$$\int\limits_{T}\!\!\int \frac{A(x,y)dxdy}{x^p y^p} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int\limits_{T_\varepsilon}\!\!\int \frac{A(x,y)dxdy}{x^p y^p} + \frac{B(\varepsilon)}{\varepsilon^{2p-2}} + C(\varepsilon)\ln(\varepsilon) + D(\varepsilon)\ln^2(\varepsilon)\right], \qquad (1.19)$$

где функция $B(\varepsilon)$ имеет производные до $(2p-1)$-го порядка, а функции $C(\varepsilon)$, $D(\varepsilon)$ имеют производные первого порядка. Функции $B(\varepsilon)$, $C(\varepsilon)$ и $D(\varepsilon)$ подбираются таким образом, чтобы предел существовал.

Распространим приведенное выше определение на полигиперсингулярные интегралы с переменными сингулярностями. Для простоты обозначений ограничимся бигиперсингулярным интегралом

$$B\varphi = \int\limits_{\gamma_1}\int\limits_{\gamma_2} \frac{\varphi(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2}{(\tau_1 - t_1)^{p_1}(\tau_2 - t_2)^{p_2}},$$

где γ_i– замкнутый ограниченный контур в плоскости комплексной переменной $z_i, i = 1, 2$. Будем считать, что $\gamma_i, i = 1, 2,$ – гладкие контуры, удовлетворяющие условиям Ляпунова.

Построим окружность с центром в точке t_1 столь малого радиуса ρ_1, что она пересекает контур γ_1 только в двух точках t_1' и t_1''. Часть контура γ_1, заключенного между точками t_1' и t_1'', обозначим через l_1.

Аналогичное построение проведем и на контуре γ_2, и часть контура γ_2, расположенного между точками t_2' и t_2'', обозначим через l_2.

Интеграл $B\varphi$ определяется выражением

$$B\varphi = \lim_{\rho_1\to 0, \rho_2\to 0}\left[\int\limits_{\gamma_1\setminus l_1}\int\limits_{\gamma_2\setminus l_2}\frac{\varphi(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2}{(\tau_1-t_1)^{p_1}(\tau_2-t_2)^{p_2}} - \frac{\Gamma(\rho_1,\rho_2)}{\rho_1^{p_1-1}\rho_2^{p_2-1}}\right],$$

где $\Gamma(\rho_1,\rho_2)$– функция, имеющая непрерывно дифференцируемые производные до p_1-1 порядка по переменной ρ_1 и до p_2-1 порядка по переменной ρ_2.

Функция $\Gamma(\rho_1,\rho_2)$ выбирается таким образом, чтобы предел существовал и был единственным.

Отметим, что в соответствии с принятым в работе способом определения гиперсингулярных интегралов для нахождения функции $\Gamma(\rho_1,\rho_2)$ нужно вычислить по частям последний интеграл и из результата вычесть слагаемые, стремящиеся к бесконечности, когда $\rho_i\to 0, i=1,2$.

Дадим, следуя работе [77], определение регуляризации по Адамару многомерных интегралов от функций со степенными особенностями. При этом ограничимся случаем функций двух переменных, так как определение и все последующие результаты дословно распространяются на случай многомерных интегралов любой конечной размерности.

Рассмотрим интеграл

$$L\varphi \equiv \int\int\limits_{G}\frac{\varphi(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2}{((\tau_1-t_1)^2+(\tau_2-t_2)^2)^{p/2}},$$

где (t_1,t_2)– точка области $G; p\ (p>2)$– целое число.

Обозначим через $R(t,\varepsilon), t=(t_1,t_2)$ круг с центром в точке t и с радиусом ε.

Определение 1.16. Регуляризацией интеграла $L\varphi$ при $p\geq 3$ называется предел

$$L\varphi = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int\int\limits_{G\setminus R(t,\varepsilon)}\frac{\varphi(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2}{((\tau_1-t_1)^2+(\tau_2-t_2)^2)^{p/2}} - \frac{B(\varepsilon)}{\varepsilon^{p-2}} - C(\varepsilon)\ln\varepsilon\right),$$

где $B(x)$, $C(x)$– любые функции, на которые налагаются следующие условия:

а) рассматриваемый предел существует;

б) $B(x)$ имеет непрерывные производные до $p-2$-го порядка в окрестности точки t;

в) функция $C(x)$ имеет производные первого порядка в окрестности нуля.

Достаточность этого определения вытекает из следующих соображений.

Пусть $t = (t_1, t_2)-$ точка, лежащая внутри или на границе области G. Введем полярные координаты с центром в точке (t_1, t_2). Имеем

$$L\varphi(t) = \lim_{\varepsilon\to 0} \int \int\limits_{G\setminus R(t,\varepsilon)} \frac{\varphi(\tau_1, \tau_2)d\tau_1 d\tau_2}{((\tau_1 - t_1)^2 + (\tau_2 - t_2)^2)^{p/2}} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_0^{\omega} \int\limits_{\varepsilon}^{A(\omega)} \frac{\varphi^*(\rho, \theta)\rho d\rho}{\rho^p} d\theta = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_0^{\omega} \left[\int\limits_{\varepsilon}^{A(\omega)} \frac{\varphi^*(\rho, \theta)}{\rho^{p-1}} d\rho \right] d\theta.$$

Здесь $0 \le \omega < 2\pi$, если точка t лежит на границе области G, $\omega = 2\pi$, если точка t лежит внутри области G.

Интегрируя внутренний интеграл по частям, имеем:

$$L\varphi(t) = \int\limits_0^{\omega} \left[\sum_{k=0}^{p-3} A_k \frac{\partial^k \varphi^*}{\partial \rho^k}(\rho, \theta)\rho^{1+k-(p-1)} + A_{p-2} \frac{\partial^{p-2}}{\partial \rho^{p-2}}(\rho, \theta) \ln \rho \right|_{\varepsilon}^{A(\varepsilon)} d\theta =$$

$$= \sum_{k=0}^{p-3} \left[A_k \left(\int\limits_0^{\omega} \varphi^{*(k)}(A(\omega), \theta) d\Theta \right) (A(\omega))^{2+k-p} - \right.$$

$$\left. -A_k \left(\int\limits_0^{\omega} \varphi^{*(k)}(\varepsilon, \theta) d\theta \right) \varepsilon^{2+k-p} \right] +$$

$$+A_{p-2} \left(\int\limits_0^{\omega} \varphi^{*(p-2)}(A(\omega), \theta) d\theta \right) \ln A(\omega) - A_{p-2} \left(\int\limits_0^{\omega} \varphi^{*(p-2)}(\varepsilon, \theta) d\theta \right) \ln \varepsilon.$$

Переходя здесь к пределу и выделяя "конечную" часть, приходим к определению 1.16.

Замечание. В ряде случаев более удобно использовать следующее определение гиперсингулярного интеграла:

$$L\varphi = \lim_{h\to 0} \left[\int \int\limits_{\Omega\setminus\Omega_1} \frac{\varphi(\tau_1, \tau_2)d\tau_1 d\tau_2}{((\tau_1 - t_1)^2 + (\tau_2 - t_2)^2)^p} - \frac{B(t)}{h^{2p-2}} \right],$$

где $\Omega_1 = [t_1 - h, t_1 + h; t_2 - h, t_2 + h]$.

Докажем эквивалентность двух последних определений. Для этого достаточно показать, что

$$\left| \int \int\limits_{\Omega_1 \setminus R(0,\rho)} \frac{\varphi(\tau_1,\tau_2) d\tau_1 d\tau_2}{((\tau_1 - t_1)^2 + (\tau_2 - t_2)^2)^p} \right| = O\left(\frac{1}{h^{2p-2}}\right).$$

Здесь $R(0,\rho)$– круг, вписанный в квадрат $\Omega_1, t = (t_1, t_2)$.

Нетрудно видеть, что

$$\left| \int \int\limits_{R(0,h) \setminus R(0,\rho)} \frac{\varphi(\tau_1,\tau_2) d\tau_1 d\tau_2}{((\tau_1 - t_1)^2 + (\tau_2 - t_2)^2)^p} \right| \leq$$

$$\leq M \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_\rho^h \frac{d\rho d\varphi}{\rho^{2p-1}} = \frac{M_1}{\rho^{2p-2}}.$$

Таким образом, эквивалентность определений доказана.

Определим гиперсингулярные интегралы с особенностями на произвольных контурах, ограничившись для простоты двумерным случаем. К этим интегралам сводятся задачи механики композитных материалов [76].

Рассмотрим интеграл $H(f,\gamma) \equiv \int \int\limits_{R_2} \frac{f(t_1,t_2)}{\gamma(t_1,t_2)} dt_1 dt_2$,

где $\gamma(t_1,t_2)$– гладкая функция. В большинстве случаев будем считать, что $\gamma(t_1,t_2)$– полином r-го порядка по переменным t_1 и t_2. Пусть контур γ определяется уравнением $\gamma(t_1,t_2) = 0$, а ε– произвольное малое число.

Обозначим через Γ_ε область, состоящую из точек, расстояние от которых до контура γ не превосходит ε. Расстояние между точками области Γ_ε и контуром γ будем вычислять в евклидовой метрике.

Пусть каждая точка контура γ будет нулем не выше r-го порядка функции $\gamma(t_1,t_2)$. Пусть L_ε– граница области Γ_ε.

Определение 1.17 [77]. Конечной частью интеграла

$$H(f,\gamma) = \int \int\limits_{R_2} \frac{f(t_1,t_2)}{\gamma(t_1,t_2)} dt_1 dt_2 \tag{1.20}$$

назовем предел

$$H(f,\gamma) = \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\int \int\limits_{R_2 \setminus \Gamma_\varepsilon} \frac{f(t_1,t_2)}{\gamma(t_1,t_2)} dt_1 dt_2 - \frac{F_{\gamma,\varepsilon}(\varepsilon)}{\varepsilon^{r-1}} \right], \tag{1.21}$$

где $F_{\gamma,\varepsilon}(\varepsilon)-$ функция, удовлетворяющая двум условиям:

1) в области Γ_ε функция $F_{\gamma,\varepsilon}(\varepsilon)$ имеет производные до r-го порядка;

2) предел существует.

Можно показать, что предел не зависит от вида функции $F_{\gamma,\varepsilon}(\varepsilon)$.

Отметим, что данное выше определение многомерных гиперсингулярных интегралов допускает распространение на случай, когда уравнение $\gamma(t_1,t_2)=0$ определяет контур, состоящий из пересекающихся дуг.

Приведем простой пример использования этого определения.

Пример. Рассмотрим следующий интеграл:

$$\int\limits_{R_2}\!\!\int \frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2-25)^3}dxdy. \tag{1.22}$$

Пусть $\gamma-$ окружность с центром в начале координат и радиусом, равным 5. Обозначим через γ_+ и γ_- окружности с радиусами, равными $5+\varepsilon$ и $5-\varepsilon$, и центром в начале координат. Обозначим через Γ_ε область, расположенную между γ_+ и γ_-.

Вычислим предел

$$\int\limits_{R_2\backslash\Gamma_\varepsilon}\!\!\int \frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2-25)^3}dxdy =$$

$$=\int\limits_{G_1}\!\!\int \frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2-25)^3}dxdy+\int\limits_{G_2}\!\!\int \frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2-25)^3}dxdy=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{5+\varepsilon}^{\infty}\frac{\rho d\rho d\varphi}{(\rho^2-25)^2}+\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{5-\varepsilon}\frac{\rho d\rho d\varphi}{(\rho^2-25)^2}+$$

$$+25\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{5+\varepsilon}^{\infty}\frac{\rho d\rho d\varphi}{(\rho^2-25)^3}+\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{5-\varepsilon}\frac{\rho d\rho d\varphi}{(\rho^2-25)^3}=$$

$$=-\frac{\pi}{50}+\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{\varepsilon^2+10\varepsilon}-\frac{1}{\varepsilon^2-10\varepsilon}\right)+\frac{25\pi}{4}\left(\frac{1}{(\varepsilon^2+10\varepsilon)^2}-\frac{1}{(\varepsilon^2-10\varepsilon)^2}\right),$$

где G_1 $-$ область вне γ_+ и G_2 $-$ область внутри γ_-. Пусть

$$F_{\gamma,\varepsilon}=\varepsilon^2\left(\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{\varepsilon^2+10\varepsilon}-\frac{1}{\varepsilon^2-10\varepsilon}\right)+\frac{25\pi}{4}\left(\frac{1}{(\varepsilon^2+10\varepsilon)^2}-\frac{1}{(\varepsilon^2-10\varepsilon)^2}\right)\right).$$

Тогда гиперсингулярный интеграл равен $-\pi/50$.

Приведем еще одно определение гиперсингулярных интегралов, удобное в тех случаях, когда особенностями являются кусочно-гладкие линии и исследуются приближенные методы вычисления этих интегралов.

Пусть в конечной части плоскости E_2 имеется гладкий контур γ, описываемый уравнением $\gamma(x_1, x_2) = 0$. Положим, для определенности

$$\gamma(x_1, x_2) = a_{00} + a_{10}x_1 + a_{20}x_2 + \cdots + a_{n0}x_1^n +$$

$$+a_{n-1,1}x_1^{n-1}x_2 + \cdots + a_{1,n-1}x_1x_2^{n-1} + a_{0n}x_2^n.$$

Кроме того, предположим вначале, что уравнение $\gamma(x_1, x_2) = 0$ определяет замкнутый ограниченный контур, каждая точка которого является нулем порядка не выше r, $r \geq 1$. Мы будем говорить, что функция $\gamma(x_1, x_2)$ имеет в точке (x_1^0, x_2^0) нуль r-го порядка, если в разложении этой функции в ряд Тейлора по степеням $(x_1 - x_1^0)$ и $(x_2 - x_2^0)$ отсутствуют члены ниже r-го порядка , т. е.

$$\gamma(x_1, x_2) = a_{r0}(x_1 - x_1^0)^r + a_{r-1,1}(x_1 - x_1^0)^{r-1}(x_2 - x_2^0) +$$

$$+a_{r-2,2}(x_1-x_1^0)^{r-2}(x_2-x_2^0)^2 + a_{r-3,3}(x_1-x_1^0)^{r-3}(x_2-x_2^0)^3 + \cdots + a_{0r}(x-x_2^0)^r +$$

$+$ члены более высокого порядка.

Будем вычислять интеграл (1.20) по формуле

$$H\varphi = \lim_{h\to 0}\frac{1}{2}\left[\int\int\limits_{E_2} \frac{\varphi(x_1, x_2)}{\gamma(x_1, x_2) + ih}dx_1dx_2 + \right.$$

$$\left. + \int\int\limits_{E_2} \frac{\varphi(x_1, x_2)}{\gamma(x_1, x_2) - ih}dx_1dx_2\right], \tag{1.23}$$

где функция $F(h)$ подбирается так, чтобы предел существовал.

Покажем, что вычисление интегралов вида (1.20) по формулам (1.21) и (1.23) эквивалентны.

В самом деле, пусть существует интеграл (1.20). Тогда по данному выше определению 1.17 интеграла Адамара, для любого ε $(\varepsilon > 0)$ существует такое δ, что

$$\left|\int\int\limits_{E_2\setminus\Gamma_\delta} \frac{\varphi(x_1, x_2)}{\gamma(x_1, x_2)}dx_1dx_2 - \frac{F(\delta)}{\delta^{r-1}}\right| < \varepsilon,$$

где Γ_δ – область, являющаяся δ-окрестностью кривой γ, определяемой уравнением $\gamma(x_1,x_2)=0$.

Рассмотрим теперь регуляризацию интеграла (1.20) по формуле (1.23). Положим $h=\delta^{2r}$.

Представим правую часть формулы (1.23) в виде

$$\frac{1}{2}\left[\int\limits_{E_2\setminus\Gamma_\delta}\!\!\int \frac{\varphi(x_1,x_2)}{\gamma(x_1,x_2)+ih}dx_1dx_2+\int\limits_{E_2\setminus\Gamma_\delta}\!\!\int \frac{\varphi(x_1,x_2)}{\gamma(x_1,x_2)-ih}dx_1dx_2+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{\Gamma_\delta}\!\!\int \varphi(x_1,x_2)\left[\frac{1}{\gamma(x_1,x_2)+ih}+\frac{1}{\gamma(x_1,x_2)-ih}\right]dx_1dx_2\right].$$

Рассмотрим разность

$$\left|\left[\int\limits_{E_2\setminus\Gamma_\delta}\!\!\int \frac{\varphi(x_1,x_2)}{\gamma(x_1,x_2)}dx_1dx_2-\frac{F_1(\delta)}{\delta^{r-1}}\right]-\right.$$

$$-\frac{1}{2}\left[\int\limits_{E_2\setminus\Gamma_\delta}\!\!\int \varphi(x_1,x_2)\left[\frac{1}{\gamma(x_1,x_2)+ih}+\frac{1}{\gamma(x_1,x_2)-ih}\right]dx_1dx_2+\right.$$

$$\left.\left.+\int\limits_{\Gamma_\delta}\!\!\int \varphi(x_1,x_2)\left[\frac{1}{\gamma(x_1,x_2)+ih}+\frac{1}{\gamma(x_1,x_2)-ih}\right]dx_1dx_2\right]\right|.$$

При сделанных выше предположениях вначале оценим выражение

$$\left|\int\limits_{\Gamma_\delta}\!\!\int \varphi(x_1,x_2)\left[\frac{1}{\gamma(x_1,x_2)+ih}+\frac{1}{\gamma(x_1,x_2)-ih}\right]dx_1dx_2\right|\le\frac{A}{\delta^{r-1}}\le$$

$$\le\frac{A}{h^{(r-1)/2r}}.$$

Так как выражения

$$\frac{F_1(\delta)}{\delta^{r-1}},\qquad \frac{A)}{h^{(r-1)/2r}}$$

подбираются таким образом, чтобы соответствующие пределы были конечны, то для доказательства эквивалентности формул (1.21) и (1.23) достаточно доказать справедливость формулы

$$\lim_{h\to 0}\left|\int\limits_{E_2\setminus\Gamma_\delta}\!\!\int \varphi(x_1,x_2)\left[\frac{1}{\gamma(x_1,x_2)}-\right.\right.$$

$$-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\gamma(x_1,x_2)+ih}+\frac{1}{\gamma(x_1,x_2)-ih}\right]\Bigg]\,dx_1dx_2\Bigg|=0.$$

В самом деле,

$$\Bigg|\int\int\limits_{E_2\setminus\Gamma_\delta}\varphi(x_1,x_2)\Bigg[\frac{1}{\gamma(x_1,x_2)}-$$

$$-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\gamma(x_1,x_2)+ih}+\frac{1}{\gamma(x_1,x_2)-ih}\right]\Bigg]\,dx_1dx_2\Bigg|\le$$

$$\le\int\int\limits_{E_2\setminus\Gamma_\delta}\frac{h^2\varphi(x_1,x_2)dx_1dx_2}{\gamma(x_1,x_2)(\gamma^2(x_1,x_2)+h^2)}\le$$

$$\le Ah\int\int\limits_{E_2\setminus\Gamma_\delta}\frac{hdx_1dx_2}{\gamma^3(x_1,x_2)}\le Ah\int\int\limits_{E_2\setminus\Gamma_\delta}\frac{dx_1dx_2}{\gamma^2(x_1,x_2)}\le$$

$$\le Ah\delta^{-(2r-1)}\le A\delta.$$

Из полученных соотношений следует, что способы вычисления интеграла (1.20) по формулам (1.21) и (1.23) эквивалентны.

Замечание. Данное выше определение гиперсингулярных интегралов (см. определение 1.16) может быть перенесено на многомерные сингулярные интегралы. Это позволяет ввести определение многомерных сингулярных интегралов, не использующее понятия характеристики и не требующее выполнения достаточно жесткого условия существования многомерных сингулярных интегралов.

Напомним классическое определение многомерных сингулярных интегралов [59], ограничившись для простоты обозначений двумерным случаем.

Пусть $\bar\Omega-$ область в E_2. Область $\bar\Omega$ может быть как конечной, так и бесконечной.

Определение 1.18 [59]. Многомерный сингулярный интеграл

$$M\varphi=\int\limits_{\bar\Omega}\frac{f(\theta,t,\tau)\varphi(\tau)}{r^2(t,\tau)}d\tau_1d\tau_2,\quad t\in\Omega, \tag{1.24}$$

определяется формулой

$$M\varphi=\lim_{\varepsilon\to0}\int\limits_{\bar\Omega\setminus S(t,\varepsilon)}\frac{f(\theta,t,\tau)\varphi(\tau)}{r^2(t,\tau)}d\tau_1d\tau_2,\ t\in\Omega,$$

где $S(t,\varepsilon)-$ круг радиуса ε с центром в точке t, $t=(t_1,t_2)$, $r^2(t,\tau)=$
$=\sum_{k=1}^{2}(t_k-\tau_k)^2$, $\theta=(t-\tau)/r(t,\tau)$.

Необходимое и достаточное условие существования интеграла (1.24) заключается в выполнении равенства

$$\int\limits_{S} f\left(\frac{t-\tau}{r(t,\tau)},t,\tau\right)ds=0$$

в каждой внутренней точке области $\bar{\Omega}$. Здесь $S-$ единичная окружность с центром в точке t, которую пробегает точка Θ, $\Theta=(t-\tau)/r(t,\tau)$.

Рассмотрим теперь многомерный сингулярный интеграл

$$M\varphi=\int\limits_{\Omega}\frac{\varphi(\tau)}{r^2(t,\tau)}d\tau,\quad t\in\bar{\Omega},$$

в котором не используется понятие характеристики.

Пусть $t-$ произвольная точка, лежащая в области $\bar{\Omega}$. Обозначим через $S(t,\varepsilon)$ круг радиуса ε с центром в точке t, расположенный в плоскости E_2, а через $S^*(t,\varepsilon)-$ пересечение круга $S(t,\varepsilon)$ с областью Ω.

Определение 1.19. Многомерным сингулярным интегралом $M\varphi$ называется предел при $\varepsilon\to 0$ выражения

$$M\varphi=\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int\limits_{\bar{\Omega}\setminus S^*(t,\varepsilon)}\frac{\varphi(\tau)}{r^2(t,\tau)}d\tau-F(\varepsilon)\ln\varepsilon\right],$$

где на функцию $F(\varepsilon)$ налагаются следующие условия:

1) функция $F(\varepsilon)$ удовлетворяет условию Гельдера;

2) предел существует и не зависит от функции $F(\varepsilon)$.

Данное выше определение позволяет рассматривать многомерные сингулярные интегралы при значениях t, лежащих на границе области $\bar{\Omega}$.

Заканчивая этот раздел, более подробно остановимся на определениях гиперсингулярных интегралов в случае, когда особая точка лежит на границе области. При этом будем следовать работе [29].

Для простоты обозначений в этом и следующих разделах будем рассматривать бигиперсингулярные интегралы. Из приведенных ниже определений и формул следует, что они легко распространяются на полигиперсингулярные интегралы любой конечной размерности.

Рассмотрим интеграл

$$Bf=\int\limits_0^1\int\limits_0^1\frac{f\left(\tau_1,\tau_2\right)d\tau_1 d\tau_2}{\tau_1^{p_1}\tau_2^{p_2}}. \qquad (1.25)$$

Пусть функция $f(t_1, t_2) \in W^{r_1, r_2}(1)$, где $r_1 \ge p_1$, $r_2 \ge p_2$, $p_1 \ge 2$, $p_2 \ge 2$.

Введем обозначения: $\Omega = [0,\, 1]^2$, $\Omega_\eta = [\eta,\, 1]^2$, где η $(\eta > 0)$– достаточно малое вещественное число.

Определение 1.20 [29]. Конечной частью интеграла Bf называется предел

$$Bf = \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 \frac{f(\tau_1, \tau_2)\, d\tau_1 d\tau_2}{\tau_1^{p_1} \tau_2^{p_2}} =$$

$$= \lim_{\eta \to 0} \left[\iint\limits_{\Omega_\eta} \frac{f(\tau_1, \tau_2)\, d\tau_1 d\tau_2}{\tau_1^{p_1} \tau_2^{p_2}} - \frac{g(\eta)}{\eta^{p_1 + p_2 - 2}} - g_1(\eta) \ln |\eta| - g_2(\eta) \ln^2 \eta \right], \quad (1.26)$$

где $g(\eta), g_1(\eta), g_2(\eta)$– функции, удовлетворяющие следующим условиям:

1) предел существует;

2) функция $g(\eta)$ имеет, по крайней мере, $p_1 + p_2 - 1$ производную в окрестности нуля;

3) функции $g_1(\eta), g_2(\eta)$, по крайней мере, удовлетворяют условию Дини–Липшица.

Рассмотрим интеграл

$$Df = \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 \frac{f(\tau_1,\ \tau_2)\, d\tau_1 d\tau_2}{(\tau_1^2 + \tau_2^2)^{p/2}}.$$

Пусть η $(\eta > 0)$– достаточно малое вещественное число. Введем обозначение $\Omega_\eta = [\eta,\, 1] \times [\eta,\, 1]$.

Определение 1.21 [29]. Конечной частью интеграла Df называется предел

$$Df = \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 \frac{f(\tau_1,\ \tau_2)\, d\tau_1 d\tau_2}{(\tau_1^2 + \tau_2^2)^{p/2}} = \lim_{\eta \to 0} \left[\iint\limits_{\Omega_\eta} \frac{f(\tau_1,\ \tau_2)\, d\tau_1 d\tau_2}{(\tau_1^2 + \tau_2^2)^{p/2}} - \frac{g(\eta)}{\eta^{p-2}} - \right.$$

$$\left. - g_1(\eta) \ln |\tau| - g_2(\eta) \ln^2 |\tau| \right], \quad (1.27)$$

где $g(\eta)$ $g_1(\eta)$, $g_2(\eta)$ – функции, удовлетворяющие следующим условиям:

1) предел (1.27) существует;

2) функция $g(\eta)$ имеет производные, по крайней мере, до $(p-1)$-го порядка в окрестности нуля;

3) функции $g_i(t) (i = 1, 2)$ удовлетворяют условию Гельдера H_α при $0 < \alpha \le 1$.

В ряде случаев удобным является следующее определение. Пусть $\Omega_\eta^* = \Omega \backslash R\,(0,\ \eta)$, где $R\,(0,\ \eta)$ – круг радиуса η с центром в начале координат.

Определение 1.22 [29]. Конечной частью интеграла Df называется предел

$$Df = \int_0^1 \int_0^1 \frac{f\,(\tau_1,\ \tau_2)\,d\tau_1 d\tau_2}{(\tau_1^2+\tau_2^2)^{p/2}} =$$

$$= \lim_{\eta\to 0}\left[\iint\limits_{\Omega_\eta^*} \frac{f\,(\tau_1,\ \tau_2)\,d\tau_1 d\tau_2}{(\tau_1^2+\tau_2^2)^{p/2}} - \frac{g\,(\eta)}{\eta^{p-2}} - g_1(\eta)\ln\eta\right]. \qquad (1.28)$$

Здесь на функции $g\,(\eta)\,, g_1(\eta)$ налагаются следующие условия:

1) предел (1.28) существует;

2) функция $g\,(\eta)$ имеет производные, по крайней мере, до $(p-1)$-го порядка в окрестности нуля;

3) функция $g_1(\eta)$ удовлетворяет условиям Дини – Липшица.

Докажем эквивалентность двух последних определений. Для этого достаточно показать, что

$$\left|\iint\limits_G \frac{f\,(\tau_1,\ \tau_2)\,d\tau_1 d\tau_2}{(\tau_1^2+\tau_2^2)^{p/2}}\right| = O\left(\frac{1}{\eta^{p-2}}\right), \quad G = \Omega_\eta \setminus \Omega_\eta^*.$$

Нетрудно видеть, что

$$\left|\iint\limits_G \frac{f\,(\tau_1,\ \tau_2)\,d\tau_1 d\tau_2}{(\tau_1^2+\tau_2^2)^{p/2}}\right| \le \iint\limits_{G_1} \frac{|f\,(\tau_1,\ \tau_2)|\,d\tau_1 d\tau_2}{(\tau_1^2+\tau_2^2)^{p/2}} \le M\iint\limits_{G_1} \frac{d\tau_1 d\tau_2}{(\tau_1^2+\tau_2^2)^{p/2}} \le$$

$$\le M\pi\left.\frac{\rho^{2-p}}{2-p}\right|_\eta^{\sqrt{2}\eta} = \frac{M\pi}{p-2}\left(\frac{1}{\eta^{p-2}} - \frac{1}{2^{(p-2)/2}\eta^{p-2}}\right) = \frac{A}{\eta^{p-2}},$$

где $G_1 = R\left(0,\ \sqrt{2}\eta\right) \backslash R\,(0,\ \eta)$.

Таким образом, эквивалентность определений 1.21 и 1.22 доказана.

Рассмотрим гиперсингулярный интеграл

$$Ef = \iint\limits_\Delta \frac{f\,(\tau_1,\ \tau_2)\,d\tau_1 d\tau_2}{(\tau_1^2+\tau_2^2)^{p/2}},$$

где Δ – треугольник ABC с вершинами в точках $A\,(0,\ 0)$, $B\,(b,\ 0)$, $C\,(c,\ d)$, $0 < c \le b$, $0 < d$. Для определенности будем рассматривать прямоугольный треугольник с прямым углом в точке B. Это обстоятельство, в связи со свойством аддитивности по области интегрирования гиперсингулярных интегралов, не налагает никаких ограничений на рассматриваемые интегралы.

Пусть $0 < b_1 < b$. Обозначим через $\Delta_\eta A_1B_1C_1$ треугольник, подобный треугольнику ΔABC, с вершинами в точках $A_1(0,\,0)$, $B_1(b_1,\,0)$, $C_1(b_1,\,d_1)$, периметр которого равен η.

Определение 1.23. Пусть $f(t_1,\,t_2) \in C_2^r(1)$, $r \geq p$. Конечной частью интеграла Ef называется предел

$$Ef = \iint\limits_{\Delta} \frac{f(\tau_1,\ \tau_2)\,d\tau_1 d\tau_2}{(\tau_1^2+\tau_2^2)^{p/2}} =$$

$$= \lim_{\eta\to 0}\left[\iint\limits_{\Delta_1} \frac{f(\tau_1,\ \tau_2)\,d\tau_1 d\tau_2}{(\tau_1^2+\tau_2^2)^{p/2}} - \frac{g(\eta)}{\eta^{p-2}} - g_1(\eta)\ln\eta\right], \qquad (1.29)$$

где $\Delta_1 = \Delta\backslash\Delta_\eta A_1B_1C_1$. На функции $g(\eta)$, $g_1(\eta)$ налагаются следующие условия:

1) в выражении (1.29) предел существует;

2) функция $g(\eta)$ имеет производные, по крайней мере, до $(p-1)$-го порядка в окрестности нуля;

3) функция $g_1(\eta)$ удовлетворяет условиям Дини $-$ Липшица.

Замечание. В случае, если для многомерных сингулярных интегралов используется определение 1.15, то результаты, изложенные в книге, распространяются и на многомерные сингулярные интегралы.

2. Постановка задачи построения оптимальных алгоритмов вычисления гиперсингулярных интегралов

Постановка задачи построения оптимальных квадратурных и кубатурных формул вычисления сингулярных интегралов изложена в первой части данной книги. Ниже излагается постановка задачи построения оптимальных квадратурных и кубатурных формул вычисления гиперсингулярных интегралов различных видов.

Постановка задачи построения оптимальных квадратурных формул принадлежит А. Н. Колмогорову .

В дальнейшем Н. С. Бахвалов [4] сформулировал задачу построения оптимальных, асимптотически оптимальных и оптимальных по порядку алгоритмов решения задач математической физики, из которой следовала постановка задачи построения оптимальных, асимптотически оптимальных и оптимальных по порядку квадратурных формул.

Вначале дадим определения оптимальных, асимптотически оптимальных и оптимальных по порядку квадратурных формул вычисления гиперсингулярных интегралов (интегралов Адамара) с фиксированной особенностью. Остановимся на интеграле

$$J\varphi = \int_{-1}^{1} \frac{\varphi(\tau)}{\tau^p} d\tau, \; p = 2, 3, \ldots, \tag{2.1}$$

который будем вычислять по квадратурной формуле

$$J\varphi = \sum_{k=1}^{N} \sum_{l=0}^{\rho} p_{kl} \varphi^{(l)}(s_k) + R_N(s_k, p_{kl}, \varphi) \tag{2.2}$$

с узлами s_k и коэффициентами p_{kl}, $k = 1, 2, \ldots, N$, $l = 0, 1, \ldots, \rho$, где $0 \le \rho$, $\rho-$ фиксированное целое число, определяемое гладкостью класса функций, к которому принадлежит $\varphi(\tau)$. Здесь $|R_N(s_k, p_{kl}, \varphi)|-$ погрешность квадратурной формулы (к.ф.) (2.2).

Если $\Psi-$ некоторый класс заданных на сегменте $[-1, 1]$ функций, то положим

$$R_N(s_k, p_{kl}, \Psi) = \sup_{\varphi \in \Psi} |R_N(s_k, p_{kl}, \varphi)|.$$

Через $\zeta_N[\Psi]$ обозначим величину $\zeta_N[\Psi] = \inf\limits_{(s_k, p_{kl})} R_N(s_k, p_{kl}, \Psi)$, в которой нижняя грань берется по всевозможным N узлам s_k и коэффициентам $p_{kl}, k = 1, 2, \ldots, N$, $l = 0, 1, \ldots, \rho$.

Квадратурную формулу (2.2), построенную на узлах s_k^* и весах p_{kl}^* $(k = 1, 2, \ldots, N,\ l = 0, 1, \ldots, \rho)$, будем называть оптимальной, асимптотически оптимальной, оптимальной по порядку, если

$$\frac{R_N\left(s_k^*, p_{kl}^*, \Psi\right)}{\zeta_N[\Psi]} = 1, \quad \lim_{N \to \infty} \frac{R_N\left(s_k^*, p_{kl}^*, \Psi\right)}{\zeta_N[\Psi]} = 1,$$

$$R_N\left(s_k^*, p_{kl}^*, \Psi\right) \asymp \zeta_N[\Psi]$$

соответственно. Знак $\asymp$ (слабая эквивалентность) означает, что имеются две константы A и B $(0 < A, B < \infty)$, не зависящие от N и такие, что

$$A\zeta_N[\Psi] < R_N\left(s_k^*, p_{kl}^*, \Psi\right) < B\zeta_N[\Psi].$$

В применении к гиперсингулярным интегралам с переменной особенностью задача построения оптимальных квадратурных формул заключается в следующем. Рассмотрим интеграл

$$A\varphi = \int\limits_a^b \frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{(\tau - t)^p}, \quad a \le t \le b, \quad p- \text{ целое}, \tag{2.3}$$

который будем вычислять по квадратурной формуле

$$A\varphi = \sum_{k=1}^{N} \sum_{l=0}^{\rho} \varphi^{(l)}(s_k) p_{kl}(t) + R_N\left(t, s_k, p_{kl}(t), \varphi\right) \tag{2.4}$$

с узлами s_k и весами $p_{kl}(t)$ $(k = 1, 2, \ldots, N,\ l = 0, 1, \ldots, \rho,)$, где $\rho-$ фиксированное неотрицательное целое число, определяемое гладкостью класса функций, к которому принадлежит $\varphi(t)$.

Под погрешностью квадратурной формулы (2.4) будем понимать величину

$$R_N(s_k, p_{kl}, \varphi) = \sup_t |R_N(t, s_k, p_{kl}(t), \varphi)|.$$

Если Ψ – некоторый класс заданных на сегменте $[a, b]$ функций, то положим

$$R_N(s_k, p_{kl}, \Psi) = \sup_{\varphi \in \Psi} |R_N(s_k, p_{kl}, \varphi)|.$$

Через $\zeta_N[\Psi]$ обозначим величину

$$\zeta_N[\Psi] = \inf_{(s_k, p_{kl})} R_N(s_k, p_{kl}, \Psi),$$

в которой нижняя грань берется по всевозможным N узлам s_k и весам $p_{kl}(t)$ $(k = 1, 2, \ldots, N,\ l = 0, 1, \ldots, \rho)$. Квадратурную формулу (2.4), построенную на узлах s_k^* и весах $p_{kl}^*(t)$ $(k = 1, 2, \ldots, N,\ l = 0, 1, \ldots, \rho)$, будем называть оптимальной, асимптотически оптимальной, оптимальной по порядку, если

$$\frac{R_N\left(s_k^*, p_{kl}^*, \Psi\right)}{\zeta_N[\Psi]} = 1, \quad \lim_{N \to \infty} \frac{R_N\left(s_k^*, p_{kl}^*, \Psi\right)}{\zeta_N[\Psi]} = 1,$$

$$R_N\left(s_k^*, p_{kl}^*, \Psi\right) \asymp \zeta_N[\Psi]$$

соответственно.

Замечание. Во многих работах по численному анализу для определения эффективности алгоритмов используется константа Пеано. В работе [81] отмечается ее важная роль в классической теории численных методов.В случае вычисления гиперсингулярных интегралов константа Пеано определяется следующим образом.

Пусть $\Psi = W^r(1)$, где $W^r(1)-$ множество определенных на сегменте $[a, b]$ функций, имеющих непрерывные производные до $(r-1)$-го порядка и кусочно-непрерывную производную r-го порядка, удовлетворяющую неравенству $\|f^{(r)}(t)\|_{C[a,b]} = 1$.

Рассмотрим интеграл (2.1) с подынтегральной функцией $\varphi \in W^r(1)$, который будем вычислять по квадратурной формуле

$$J_N\varphi = \sum_{k=1}^{N}\sum_{l=0}^{\rho} p_{kl}\varphi^{(l)}(t_k),$$

$0 \le \rho \le r$, с фиксированным набором узлов t_k, $k = 1, 2, \ldots, N$, и коэффициентов p_{kl}, $k = 1, 2, \ldots, N$, $l = 0, 1, \ldots, \rho$.

Наименьшая константа c, определяемая неравенством

$$|J\varphi - J_N\varphi| \le c\|\varphi^{(r)}\|_{C[-1,1]},$$

называется константой Пеано.

Очевидно, функционал $R_N(t_k, p_{kl}, \Psi)$, $\Psi = W^r(1)$ эквивалентен константе Пеано.

Из сравнения определений констант Пеано и оптимальных, асимптотически оптимальных, оптимальных по порядку квадратурных формул следует, что константы Пеано определяют точность оптимальных по порядку квадратурных формул при фиксированных узлах и коэффициентах.

Отметим также, что константа Пеано может быть определена для многомерных интегралов Адамара.

В данной книге строятся асимптотически оптимальные, оптимальные по порядку квадратурные и кубатурные формулы вычисления гиперсингулярных интегралов с фиксированными особенностями и оптимальные по порядку квадратурные и кубатурные формулы вычисления одномерных и многомерных гиперсингулярных интегралов с переменными особенностями. Таким образом, значения константы Пеано для различных типов гиперсингулярных интегралов и различных классов функций следуют из оценок погрешности оптимальных квадратурных формул.

Постановку задачи в случае полигиперсингулярных интегралов опишем на примере гиперсингулярного интеграла следующего вида:

$$B\varphi = \int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1} \frac{\varphi(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2}{\tau_1^{p_1}\tau_2^{p_2}}, \tag{2.5}$$

$p_1, p_2 = 2, 3, \dots$, который будем вычислять по кубатурной формуле

$$B\varphi = \sum_{k_1=1}^{n_1}\sum_{k_2=1}^{n_2}\sum_{l_1=0}^{\rho_1}\sum_{l_2=0}^{\rho_2} p_{k_1k_2l_1l_2}\varphi^{(l_1,l_2)}(s_{k_1}, s_{k_2})+$$

$$+R_{n_1n_2}(s_{k_1}, s_{k_2}, p_{k_1k_2l_1l_2}, \varphi), \tag{2.6}$$

где ρ_1, ρ_2 — неотрицательные целые числа, определяемые гладкостью функции $\varphi(t_1, t_2)$; $\varphi^{(l_1,l_2)}(t_1,t_2) = \partial^{l_1+l_2}\varphi(t_1,t_2)/(\partial t_1^{l_1}\partial t_1^{l_2})$; $p_{k_1k_2l_1l_2}$, $1 \le k_i \le$ $\le n_i$, $0 \le l_i \le \rho_i$, $i = 1, 2,$ — коэффициенты, а (s_{k_1}, s_{k_2}), $-1 \le s_{k_i} \le 1$, $i = 1, 2$— узлы кубатурной формулы.

Под погрешностью кубатурной формулы понимается величина

$$|R_{n_1n_2}(s_{k_1}, s_{k_2}, p_{k_1k_2l_1l_2}, \varphi)|.$$

Если Ψ— некоторый класс функций, то под $R_{n_1n_2}(s_{k_1}, s_{k_2}, p_{k_1k_2l_1l_2}, \Psi)$ понимается величина

$$R_{n_1n_2}(s_{k_1}, s_{k_2}, p_{k_1k_2l_1l_2}, \Psi) = \sup_{\varphi\in\Psi} |R_{n_1n_2}(s_{k_1}, s_{k_2}, p_{k_1k_2l_1l_2}, \varphi)|.$$

Введем функционал

$$\zeta_{n_1n_2}[\Psi] = \inf_{s_{k_1}, s_{k_2}, p_{k_1k_2l_1l_2}} R_{n_1n_2}(s_{k_1}, s_{k_2}, p_{k_1k_2l_1l_2}, \Psi).$$

Кубатурную формулу (2.6), построенную на векторах $(s_{k_1}^*, s_{k_2}^*; p_{k_1k_2l_1l_2}^*)$, будем называть оптимальной, асимптотически оптимальной, оптимальной по порядку, если

$$\frac{R_{mn}\left(x_{k_1}^*, x_{k_2}^*; p_{k_1k_2l_1l_2}^*, \Psi\right)}{\zeta_{mn}[\Psi]} = 1, \quad \lim_{m\to\infty, n\to\infty} \frac{R_{mn}\left(x_{k_1}^*, x_{k_2}^*; p_{k_1k_2l_1l_2}^*, \Psi\right)}{\zeta_{mn}[\Psi]} = 1,$$

$$R_{mn}\left(x_{k_1}^*, x_{k_2}^*; p_{k_1k_2l_1l_2}^*, \Psi\right) \asymp \zeta_{mn}[\Psi].$$

Замечание. В выражении $\lim\limits_{m\to\infty, n\to\infty} = A$ предел понимается в следующем смысле: для любого, как угодно малого $\varepsilon(\varepsilon > 0)$ существует такое $N(N(\varepsilon))$, что при $m \ge N$, $n \ge N$

$$|A_{mn} - A| < \varepsilon.$$

Наряду с кубатурными формулами (2.6) часто используются кубатурные формулы вида

$$B\varphi = \sum_{k=1}^{N}\sum_{l_1=0}^{\rho_1}\sum_{l_2=0}^{\rho_2} p_{kl_1l_2}\varphi^{(l_1,l_2)}(M_k) + R_N(M_k, p_{kl_1l_2}, \varphi), \qquad (2.7)$$

где ρ_1, ρ_2- неотрицательные целые числа; $p_{kl_1l_2}-$ коэффициенты, $1 \leq \leq k \leq N$, $0 \leq l_i \leq \rho_i$, $i = 1, 2$, а M_k, $k = 1, 2, \ldots, N-$ узлы кубатурной формулы, $M_k = (x_k, y_k)$, $-1 \leq x_k, y_k \leq 1$, $k = 1, 2, \ldots, N$.

Под погрешностью кубатурной формулы (2.7) понимается величина

$$|R_N(M_k, p_{kl_1l_2}, \varphi)|.$$

Если $\Psi-$ некоторый класс функций, то под $R_N(M_k, p_{kl_1l_2}, \Psi)$ понимается величина

$$R_N(M_k, p_{kl_1l_2}, \Psi) = \sup_{\varphi\in\Psi} |R_N(M_k, p_{kl_1l_2}, \varphi)|.$$

Введем функционал

$$\zeta_N[\Psi] = \inf_{p_{kl_1l_2}, M_k} R_N(M_k, p_{kl_1,l_2}, \Psi),$$

где нижняя грань берется по всевозможным коэффициентам $p_{kl_1l_2}$, $k = = 1, 2, \ldots, N$, $0 \leq l_i \leq \rho_i$, $i = 1, 2$, и узлам M_k, $k = 1, 2, \ldots, N$.

Аналогичным образом определяются оптимальные, асимптотически оптимальные и оптимальные по порядку кубатурные формулы вычисления многомерных гиперсингулярных интегралов с фиксированными особенностями вида

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{\varphi(\tau_1, \tau_2)d\tau_1 d\tau_2}{(\tau_1^2 + \tau_2^2)^{p/2}}$$

при $p = 3, 4, \ldots$.

Бигиперсингулярные интегралы с переменными особенностями

$$I\varphi = \int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2} \frac{\varphi(\tau_1, \tau_2)}{(\tau_1 - t_1)^{p_1}(\tau_2 - t_2)^{p_2}} d\tau_1 d\tau_2, \quad a_i \leq t_i \leq b_i, \quad i = 1, 2, \qquad (2.8)$$

будем вычислять по кубатурным формулам

$$I\varphi = \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n}\sum_{i=0}^{\rho_1}\sum_{j=0}^{\rho_2} p_{klij}(t_1, t_2)\varphi^{(i,j)}(x_k, y_l) + R_{mn}(t_1, t_2, x_k, y_l; p_{klij}, \varphi), \quad (2.9)$$

определяемым узлами $a_1 \leq x_1 < x_2 < \ldots < x_m \leq b_1$, $a_2 \leq y_1 < y_2 < < \ldots < y_n \leq b_2$ и коэффициентами p_{klij} $(1 \leq k \leq m,\ 1 \leq l \leq n,\ i = 0, 1, \ldots, \rho_1,\ j = 0, 1, \ldots, \rho_2,\ )$. Значения ρ_i, $i = 1, 2$, определяются гладкостью функции φ.

Под погрешностью кубатурной формулы (2.9) будем понимать величину

$$R_{mn}(x_k, y_l; p_{klij}, \varphi) = \sup_{t_1, t_2} |R_{mn}(t_1, t_2; x_k.y_l; p_{klij}, \varphi)|.$$

Если Ψ – некоторый класс заданных на прямоугольнике $[a_1, b_1; a_2, b_2]$ функций, то положим

$$R_{mn}(x_k, y_l; p_{klij}, \Psi) = \sup_{\varphi \in \Psi} R_{mn}(x_k, y_l; p_{klij}, \varphi).$$

Через $\zeta_{mn}[\Psi]$ обозначим величину

$$\zeta_{mn}[\Psi] = \inf_{(k,l;klij)} R_{mn}(x_k, y_l; p_{klij}, \Psi),$$

в которой нижняя грань берется по всевозможным векторам $(k, l; klij)$ узлов и весов $(k = 1, 2, \ldots, m,\ l = 1, 2, \ldots, n)$. Кубатурную формулу (2.9), построенную на векторах $(x_k^*, y_l^*; p_{klij}^*)$, будем называть оптимальной, асимптотически оптимальной, оптимальной по порядку, если

$$\frac{R_{mn}\left(x_k^*, y_l^*; p_{klij}^*, \Psi\right)}{\zeta_{mn}[\Psi]} = 1, \quad \equiv 1, \asymp 1.$$

Интеграл $I\varphi$ можно вычислять по кубатурной формуле

$$I\varphi = \sum_{k=1}^{N} p_k(t_1, t_2)\varphi(M_k) + R_N(t_1, t_2, M_k, p_k, \varphi), \tag{2.10}$$

использующей N значений подынтегральной функции. Здесь $M_k = = (\zeta_k, \eta_k)$ – узлы кубатурной формулы (2.10), причем характер расположения узлов в прямоугольнике $[a_1, b_1; a_2, b_2]$ произвольный. Числовые характеристики погрешности определяются по формулам

$$R_N(M_k, p_k, \varphi) = \sup_{t_1, t_2} |R_N(t_1, t_2; M_k, p_k, \varphi)|;$$

$$R_N(M_k, p_k, \Psi) = \sup_{\varphi \in \Psi} R_N(M_k, p_k, \varphi), \quad \zeta_N[\Psi] = \inf_{(M_k, p_k)} R_N(M_k, p_k, \Psi).$$

Кубатурная формула (2.10), построенная на векторах $\{M_k^*, p_k^*\}$ узлов и коэффициентов называется оптимальной, асимптотически оптимальной, оптимальной по порядку, если выполнены соотношения

$$\frac{R_N(M_k^*, p_k^*, \Psi)}{\zeta_N[\Psi]} = 1, \sim 1, \asymp 1.$$

Оптимальные, асимптотически оптимальные, оптимальные по порядку кубатурные формулы вычисления многомерных гиперсингулярных интегралов

$$\int_a^b \int_c^d \frac{\varphi(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2}{((\tau_1 - t_1)^2 + (\tau_2 - t_2)^2)^{p/2}}, p > 2, (t_1, t_2) \in [a, b; c, d],$$

определяется точно так же, как для интегралов вида (2.8).

Замечание 1. Аналогичным образом определяются оптимальные квадратурные и кубатурные формулы вычисления гиперсингулярных интегралов с нецелой особенностью:

$$\int_{-1}^{1} \frac{\varphi(\tau)}{|\tau|^{p+\lambda}} d\tau, \quad p = 1, 2, \ldots, \quad 0 < \lambda \leq 1,$$

$$\int_{-1}^{1} \frac{\varphi(\tau) d\tau}{|\tau - t|^{p+\lambda}}, \quad p = 1, 2, \ldots, \quad 0 < \lambda \leq 1,$$

$$\int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} \frac{\varphi(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2}{|\tau_1 - t_1|^{p_1+\lambda_1} |\tau_2 - t_2|^{p_2+\lambda_2}}, \quad p_1, p_2 = 1, 2, \ldots, \quad 0 < \lambda_1, \lambda_2 \leq 1,$$

$$\int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} \frac{\varphi(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2}{((\tau_1 - t_1)^2 + (\tau_2 - t_2|^2)^{p+\lambda}}, \quad p = 1, 2, \ldots, \quad 0 < \lambda \leq 1.$$

Замечание 2. Определение оптимальных кубатурных формул для вычисления полигиперсингулярных интегралов приведено для простоты обозначений на примере двумерных интегралов. Нетрудно видеть, что все эти определения справедливы для гиперсингулярных интегралов любой конечной кратности.

Гиперсингулярные интегралы с переменной особенностью можно рассматривать как функции, определенные в области изменения параметра t в одномерном случае или параметров (t_1, t_2) в двумерном случае.

В этом случае интеграл $A\varphi$, определенный формулой (2.3), будем рассматривать как сопряженную функцию, определенную в области $(-\infty, a) \cup (a, b) \cup (b, \infty)$. Эту функцию будем обозначать $\tilde{\varphi}(t)$. (Отметим, что если гиперсингулярный интеграл будем понимать в смысле определения 1.8, приведенного в предыдущем разделе, то функцию $\tilde{\varphi}(t)$ можно рассматривать в области $(-\infty, \infty)$).

Аналогичным образом вводятся сопряженные функции $\tilde{\varphi}_L(t_1, t_2)$ и $\tilde{\varphi}_H(t_1, t_2)$, представимые интегралами $L\varphi$ и $H\varphi$. Функции $\tilde{\varphi}_L(t_1, t_2)$ и $\tilde{\varphi}_H(t_1, t_2)$ определены в области $\Omega^* = (-\infty, \infty)^2 \backslash \Gamma$, где $\Gamma = \partial\Omega-$ граница области $\Omega = [a_1, b_1; a_2, b_2]$. (В случае, если используется определение 1.14, функция $\tilde{\varphi}_L(t_1, t_2)$ существует в области $(-\infty, \infty)^2$).

В дальнейшем из контекста будет ясно, каким интегралом определяется сопряженная функция, и нижний индекс в обозначениях $\tilde{\varphi}_L$ и $\tilde{\varphi}_H$ будет опускаться.

Замечание 3. В случае, если рассматриваются одномерные гиперсингулярные интегралы с нецелой особенностью, то сопряженная функция $\tilde{\varphi}(t)$ определена в области $(-\infty, \infty)$. Аналогично, если рассматриваются полигиперсингулярные или многомерные гиперсингулярные интегралы с нецелыми особенностями, то соответствующие сопряженные функции определены в области $(-\infty, \infty)^l$, где $l-$ размерность интеграла.

Изложим на примере гиперсингулярного интеграла $A\varphi$ (формула (2.3)) постановку задачи построения оптимального алгоритма аппроксимации сопряженных функций.

Пусть интеграл $(A\varphi)(t)$ при $t \in \Omega$ вычисляется в предположении, что функция $\varphi(t) \in \Psi$, где $\Psi-$ некоторое функциональное множество. В качестве множества Ω можно взять сегмент $[a, b]$, интервал (a, b), множество точек $(-\infty, a) \cup (b, \infty)$ или всю числовую ось $(-\infty, \infty)$. Требуется, зная значения N функционалов от функции $\varphi \in \Psi$, построить оптимальный алгоритм аппроксимации сопряженной функции $\tilde{\varphi} = A\varphi$, $\varphi \in \Psi$, на множестве Ω.

В данной работе под значениями N функционалов от функции $\varphi(t)$ мы будем понимать N значений функции $\varphi(t)$.

Решение сформулированной выше задачи состоит из пяти этапов:

1) построение оптимального алгоритма вычисления интеграла $A\varphi$ на классе Ψ при $t \in \Omega$. (В данной работе в качестве этого алгоритма рассматриваются квадратурные формулы);

2) определение функционального множества $\tilde{\Psi}$, к которому принадлежат функции $\tilde{\varphi}(t) = (A\varphi)(t)$ при $t \in \Omega$, $\varphi \in \Psi$;

3) вычисление поперечников Бабенко и Колмогорова функционального множества $\tilde{\Psi}$;

4) построение метода наилучшего приближения функционального множества $\tilde{\Psi}$, имеющего оценку погрешности, совпадающую с величиной поперечника. (Будет показано, что наилучшее приближение осуществляется локальными сплайнами);

5) построение оптимального алгоритма. Это построение заключается в следующем. В узлах локального сплайна $\tilde{\varphi}_N(t)$, аппроксимирующего сопряженную функцию $\tilde{\varphi}(t)$, по оптимальным квадратурным формулам вычисляется интеграл $A\varphi$. Затем, используя полученные значения интеграла $(A\varphi)(t)$ в узлах сплайна $\tilde{\varphi}_N(t)$, строится сам сплайн $\tilde{\varphi}_N(t)$.

При построении оптимального алгоритма восстановления сопряженных функций используются поперечники Бабенко и Колмогорова. Приведем определения этих поперечников.

Пусть $B-$ банахово пространство, $X \subset B-$ компакт, $\Pi : X \to \bar{X}-$ представление компакта $X \subset B$ конечномерным пространством $\bar{X}$.

Определение 2.1 [69]. Пусть L^n- множество n-мерных линейных подпространств пространства B. Выражение

$$d_n(X, B) = \inf_{L^n} \sup_{x \in X} \inf_{u \in L^n} \|x - u\|,$$

где последний inf берется по всем подпространствам L^n размерности n, определяет n-поперечник Колмогорова.

Определение 2.2 [69]. Пусть $\chi-$ множество всех n-мерных линейных подпространств пространства B, Map$(X, \chi)-$ совокупность всех непрерывных отображений вида $\Pi : X \to \bar{X}$, где $\bar{X} \in \chi$. Выражение

$$d'_n(X, B) = \inf_{(L^n, \Pi)} \sup_{x \in X} \|x - \Pi(x)\|,$$

где inf берется по всевозможным парам (L^n, Π), состоящим из n-мерного линейного пространства $L^n \subset B$ и непрерывного отображения $\Pi : X \to$ $\to L^n$, определяет линейный n-поперечник Колмогорова.

Определение 2.3 [69]. Пусть $\chi \in R^n$. Выражение

$$\delta_n(X) = \inf_{(\Pi : X \to R^n)} \sup_{x \in X} \operatorname{diam} \Pi^{-1}\Pi(x),$$

где inf берется по всем непрерывным отображениям $\Pi : X \to R^n$, определяет n-поперечник Бабенко.

В главе 6 будет неоднократно использоваться следующее утверждение, связывающее величины поперечников Бабенко и Колмогорова.

Лемма 2.1 [69]. Пусть $B-$ банахово пространство, $X \subset B-$ компакт. Величины поперечников Бабенко и Колмогорова связаны неравенством

$$\delta_n(X) \leq 2d_n(X, B).$$

3. Классы функций

Ниже описываются классы функций, на которых исследуются алгоритмы вычисления интегралов Адамара.

Класс $W^r(M; [a, b])$ состоит из функций, заданных на отрезке $[a, b]$, непрерывных и имеющих непрерывные производные до $(r-1)$-го порядка включительно и кусочно-непрерывную производную r-го порядка, удовлетворяющую на этом отрезке неравенству $|f^{(r)}(x)| \leq M$.

Класс $\hat{W}^r_q(M; [a, b])$ состоит из функций $f(x)$, входящих в класс $W^r(M; a, b)$ и удовлетворяющих дополнительным условиям: $f^{(v)}(a) = f^{(v)}(b) = 0, v = 0, 1, \cdots, q$.

Класс функций Гельдера $H_\alpha(M; [a, b])$ $(0 < \alpha \leq 1)$ состоит из заданных на отрезке $[a, b]$ функций $f(x)$, удовлетворяющих во всех точках x' и x'' этого отрезка неравенству $|f(x') - f(x'')| \leq |x' - x''|^\alpha$.

Через $W^r H_\alpha(M; [a, b])$ $(r = 1, 2, \ldots; 0 < \alpha \leq 1)$ обозначаем класс функций $f(x)$, имеющих на отрезке $[a, b]$ производные r-го порядка, удовлетворяющие условию $|f^{(r)}(x') - f^{(r)}(x'')| \leq M|x' - x''|^\alpha$ при любых x', x'' на $[a, b]$.

Класс $\hat{W}^r_q H_\alpha(M; [a, b])$ состоит из функций $f(x)$, входящих в класс $W^r H_\alpha(M; a, b)$ и удовлетворяющих дополнительным условиям: $f^{(v)}(a) = f^{(v)}(b) = 0, v = 0, 1, \cdots, q$.

Класс $W^r_{L_p}(M; [a, b])$ состоит из функций, заданных на $[a, b]$, имеющих абсолютно непрерывную производную порядка $r - 1$ и производную $f^{(r)}(x)$ порядка r, такую, что $[\int\limits_a^b |f^{(r)}(x)|^p dx]^{1/p} \leq M \quad (1 \leq p \leq \infty)$, где интеграл понимается в смысле Лебега. Для простоты обозначений ниже вместо $W^r_{L_p}(M; [a, b])$ будем писать $W^r_p(M)$.

Через $\tilde{W}^r_p(M; [a, b])$ обозначен класс периодических функций с периодом $(b - a)$, входящих в класс $W^r_p(M; [a, b])$.

Через $W^r_\rho(1)$ обозначен класс функций $f(t)$, представимых в виде $f(t) = \varphi(x)/\rho(x)$, где $\varphi(x) \in W^r(1), \rho(x)-$ весовая функция.

Через $H_{\omega_1\omega_2}(D)$ обозначен класс определенных на $D = \{a \leq x \leq b,$ $c \leq y \leq d\}$ функций $f(x, y)$, таких, что для любых точек (x', y') и (x'', y'') из D $|f(x', y') - f(x'', y'')| \leq \omega_1(|x' - x''|) + \omega_2(|y' - y''|)$, где $\omega_1(\delta)$ и $\omega_2(\delta)-$ заданные модули непрерывности. В случае, когда $\omega_i(x) = x^{\alpha_i}$ $(i = 1, 2)$, используется обозначение $H_{\alpha_1\alpha_2}(D)$.

Наряду с обозначением $H_{\alpha_1\alpha_2}(D)$ используется обозначение $H_{\alpha_1,\alpha_2}(1)$ для класса функций $f(x_1, x_2)$, удовлетворяющих по каждой переменной условию Гельдера с показателем α и коэффициентом, равным единице.

$W^{r,s}(D, M), D = [a, b; c, d], 0 < M < \infty$ означает класс определенных на D функций $f(x, y)$, имеющих частные производные $f^{(\alpha,\beta)}(x, y) =$ $= \partial^{\alpha+\beta} f(x, y)/\partial x^\alpha \partial y^\beta$ $(0 \leq \alpha \leq r, 0 \leq \beta \leq s)$, причем $\|f^{(r,s)}(x, y)\|_{C(D)} \leq$ $\leq M, \|f^{(r,j)}(x, 0)\|_{C(D)} \leq M, j = 0, 1, \cdots, s - 1, \|f^{(i,s)}(0, y)\|_{C(D)} \leq M,$ $i = 0, 1, \cdots, r - 1.$

Через $\hat{W}^{r,s}_q(D, M), D = [a, b; c, d], 0 < M < \infty, q$ $-$ целое число, обозначено множество функций $f(x, y)$, принадлежащих классу функций $W^{r,s}(D, M)$ и удовлетворяющих дополнительному условию: $\partial^{i+j} f(x, y)/\partial x^i \partial y^j = 0, 0 \leq i, j \leq q.$

$W^{r,s}H_{\omega_1,\omega_2}(D)$ означает класс определенных на D функций $f(x, y)$, имеющих производные $f^{(\alpha,\beta)}(x, y) = \partial^{\alpha+\beta} f(x, y)/\partial x^\alpha \partial y^\beta$ $(0 \leq \alpha \leq r,$ $0 \leq \beta \leq s)$, причем $f^{(r,s)} \in H_{\omega_1\omega_2}$.

Через $\tilde{W}^{r,s}H_{\omega_1,\omega_2}(D), D = [a, b; a, b]$ обозначено множество функций $f(x, y)$, принадлежащих классу функций $W^{r,s}H_{\omega_1,\omega_2}(D)$ и периодических с периодом $b - a$ по каждой переменной.

Через $\overline{W}^{r_1,r_2}(1)$ обозначен класс функций $\varphi(x, y)$, имеющих частные производные по переменным x и y до r_1-го и r_2-го порядка включительно, причем $\|\varphi^{(r_1,0)}(x, y)\|_C \leq 1, \quad \|\varphi^{(0,r_2)}(x, y)\|_C \leq 1, \quad \|\varphi^{(r_1,r_2)}(x, y)\|_C \leq 1.$

Через $C^r_l(\Omega, 1), \Omega = [a_1, b_1; \cdots; a_l, b_l]$ обозначен класс функций l независимых переменных, у которых существуют и ограничены по модулю единицей все частные производные до r-го порядка включительно.

Через $C^r_{l,q}(\Omega, 1)$ обозначены функции $f(x_1, \cdots, x_l)$ l независимых переменных, входящие в класс функций $C^r_l(1)$ и удовлетворяющие дополнительным условиям: $f^{(v_1,v_2,\cdots,v_l)}(x_1, \cdots, x_l) = 0, 0 \leq |v_1| + |v_2| + \cdots + |v_l| \leq q,$ $(x_1, \cdots, x_l) \in \Gamma = \partial\Omega.$

В работе К. И. Бабенко [3] введен класс функций $Q_r(\Omega, M)$.

Определение 3.1 [3]. Пусть $\Omega = [-1,1]^l$, $\quad l = 1,2,\ldots$. Функция $\varphi(x_1\ldots,x_l)$ принадлежит классу $Q_r(\Omega, M)$, если выполнены условия

$$\max_{x\in\Omega} |\partial^{|v|}\varphi(x_1,\ldots,x_l)/\partial x_1^{v_1}\cdots\partial x_l^{v_l}| \le M$$

при $0 \le |v| \le r$,

$$|\partial^{|v|}\varphi(x_1,\ldots,x_l)/\partial x_1^{v_1}\cdots\partial x_l^{v_l}| \le M/(d(x,\Gamma))^{|v|-r}, \quad x\in\Omega\setminus\partial\Omega,$$

при $r < |v| \le 2r+1$,
где $x = (x_1,\ldots,x_l)$, $v = (v_1,\ldots,v_l)$, $|v| = v_1+\cdots+v_l$, $d(x,\Gamma)-$ расстояние от точки x до границы Γ области Ω, вычисляемое по формуле $d(x,\Gamma) =$ $= \min_{1\le i\le l} \quad \min(|1+x_i|, |1-x_i|)$.

Обобщением класса $Q_r(\Omega, M)$ являются следующие классы функций.

Определение 3.2 [11], [13]. Пусть $\Omega = [-1,1]^l$, $\quad l = 1,2,\ldots,u-$ натуральное число. Функция $\varphi(x_1\ldots,x_l)$ принадлежит классу $Q^u_{r,\gamma}(\Omega, M)$, если выполнены условия

$$\max_{x\in\Omega} |\partial^{|v|}\varphi(x)/\partial x_1^{v_1}\cdots\partial x_l^{v_l}| \le M$$

при $0 \le |v| \le r$,

$$|\partial^{|v|}\varphi(x)/\partial x_1^{v_1}\cdots\partial x_l^{v_l}| \le M(1+|\ln^u d(x,\Gamma)|)/(d(x,\Gamma))^{|v|-r-\zeta}, \quad x\in\Omega\setminus\partial\Omega$$

при $r < |v| \le s$, где $s = r+[\gamma]+1$, $\quad \gamma = [\gamma]+\mu$, $\quad 0<\mu<1$, $\quad \zeta = 1-\mu$ при $\gamma-$ нецелом, $s = r+\gamma$ при $\gamma-$ целом.

Определение 3.3 [11], [13]. Пусть $\Omega = [-1,1]^l$, $\quad l = 1,2,\ldots,\gamma-$ целое число, $s = r+\gamma$. Функция $\varphi(x_1,\ldots,x_l)$ принадлежит классу $\bar{Q}^u_{r,\gamma}(\Omega, M)$, если выполнены условия

$$\max_{x\in\Omega} |\partial^{|v|}\varphi(x)/\partial x_1^{v_1}\cdots\partial x_l^{v_l}| \le M$$

при $0 \le |v| \le r-1$,

$$|\partial^{|v|}\varphi(x)/\partial x_1^{v_1}\cdots\partial x_l^{v_l}| \le M(1+|\ln^u d(x,\Gamma)|), \quad x\in\Omega\setminus\partial\Omega$$

при $|v| = r$,

$$|\partial^{|v|}\varphi(x)/\partial x_1^{v_1}\cdots\partial x_l^{v_l}| \le M(1+|\ln^{u-1} d(x,\Gamma)|)/(d(x,\Gamma))^{v-r}, \quad x\in\Omega\setminus\partial\Omega$$

при $r < |v| \le s$.

Определение 3.4 [11], [13]. Пусть $\Omega = [-1,1]^l, \quad l = 1,2,\ldots$. Функция $\varphi(x_1,\ldots,x_l)$ принадлежит классу $Q_{r,\gamma,p}(\Omega, M) \quad (r = 1,2,\ldots, \quad 1 \leq \leq p < \infty)$, если выполнены условия

$$\max_{x\in\Omega} |\partial^{|v|}\varphi(x_1,\ldots,x_l)/\partial x_1^{v_1}\cdots\partial x_l^{v_l}| \leq M$$

при $|v| \leq r$,

$$\left[\int\int\limits_{\Omega} |d^{|v|-r-\zeta}(x,\Gamma)\partial^{|v|}\varphi(x_1,\ldots,x_l)/\partial x_1^{v_1}\cdots\partial x_l^{v_l}|^p dx_1\cdots dx_l\right]^{1/p} \leq M$$

при $r < |v| \leq s$, где $s = r+\gamma, \quad \zeta = 0$, если $r+\gamma-$ целое; $s = r+[\gamma]+1$, $\gamma = [\gamma]+\mu, \quad 0<\mu<1, \quad \zeta = 1-\mu$, если $r+\gamma-$ нецелое.

Определение 3.5. Пусть $\Omega = [-1,1]^l, \quad l = 1,2,\ldots, \quad \gamma-$ целое число. Функция $\varphi(x_1,\ldots,x_l)$ принадлежит классу $\bar{Q}_{r,\gamma,p}(\Omega, M)(r = 1,2,\ldots,$ $1 \leq p < \infty)$, если выполнены условия

$$\max_{x\in\Omega} |\partial^{|v|}\varphi(x_1,\ldots,x_l)/\partial x_1^{v_1}\cdots\partial x_l^{v_l}| \leq M$$

при $0 \leq |v| \leq r-1$,

$$|\partial^{|v|}\varphi(x)/\partial x_1^{v_1}\cdots\partial x_l^{v_l}| \leq M(1+|\ln d(x,\Gamma)|), \quad x\in\Omega\setminus\partial\Omega$$

при $|v| = r$,

$$\left[\int\int\limits_{\Omega} |d^{|v|-r}(x,\Gamma)\partial^{|v|}\varphi(x_1,\ldots,x_l)/\partial x_1^{v_1}\cdots\partial x_l^{v_l}|^p dx_1\cdots dx_l\right]^{1/p} \leq M$$

при $r < |v| \leq s$, где $s = r+\gamma$.

Определение 3.6 [11], [13]. Пусть $\Omega = [-1,1]^l, \quad l = 1,2,\ldots, \quad r = = 1,2,\ldots, 0<\gamma\leq 1$. Функция $f(x_1,\ldots,x_l)$ принадлежит классу $B_{r,\gamma}(\Omega, M)$, если выполнены условия

$$\max_{x\in\Omega} |\varphi(x_1,\ldots,x_l)| \leq M;$$

$$\max_{x\in\Omega} |\partial^{|v|}\varphi(x_1,\ldots,x_l)/\partial x_1^{v_1}\cdots\partial x_l^{v_l}| \leq M^{|v|}|v|^{|v|}$$

при $1 \leq |v| \leq r$,

$$|\partial^{|v|}\varphi(x_1,\dots,x_l)/\partial x_1^{v_1}\cdots\partial x_l^{v_l}| \le M^{|v|}|v|^{|v|}/(d(x,\Gamma))^{|v|-r-1+\gamma}, \quad x\in\Omega\setminus\partial\Omega$$

при $r < |v| \le \infty$.

Определение 3.7. Пусть $\Omega = [-1,1]^l$, $\quad l = 1,2,\dots,$ $\quad r = 1,2,\dots,$ $\gamma = 1$. Функция $f(x_1,\dots,x_l)$ принадлежит классу $\bar B_{r,\gamma}(\Omega, M)$, если выполнены условия

$$\max_{x\in\Omega}|\varphi(x_1,\dots,x_l)| \le M;$$

$$\max_{x\in\Omega}|\partial^{|v|}\varphi(x_1,\dots,x_l)/\partial x_1^{v_1}\cdots\partial x_l^{v_l}| \le M^{|v|}|v|^{|v|}$$

при $1 \le |v| \le r-1$,

$$|\partial^{|v|}\varphi(x)/\partial x_1^{v_1}\cdots\partial x_l^{v_l}| \le M(|1+\ln d(x,\Gamma)|), \quad x\in\Omega\setminus\partial\Omega$$

при $|v| = r$,

$$|\partial^{|v|}\varphi(x_1,\dots,x_l)/\partial x_1^{v_1}\cdots\partial x_l^{v_l}| \le AM^{|v|}|v|^{|v|}/(d(x,\Gamma))^{|v|-r-1+\gamma}, \quad x\in\Omega\setminus\partial\Omega$$

при $r < |v| \le \infty$.

Определение 3.8. Пусть $\Omega = [-1,1]^l$, $l = 1,2,\dots,r, s = 0,1,\dots,\gamma-$ вещественное число, $0 < \gamma$. Функция $\varphi(x_1,\dots,x_l)$ принадлежит классу $L_{0,s,\gamma}(\Omega, M)$, если выполнены условия

$$|\partial^{|v|}\varphi(x_1,\dots,x_l)/\partial x_1^{v_1}\cdots\partial x_l^{v_l}| \le M/(d(x,\Gamma))^{|v|+\gamma}, \quad x\in\Omega\setminus\partial\Omega$$

при $0 \le |v| \le s$.

Определение 3.9. Пусть $\Omega = [-1,1]^l$, $l = 1,2,\dots,$ $s = 0,1,\dots,$ $\gamma-$ вещественное число, $0 < \gamma$. Функция $\varphi(x_1,\dots,x_l)$ принадлежит классу $\bar L_{0,s,\gamma}(\Omega, M)$, если выполнены условия

$$|\varphi(x_1,\dots,x_l)| \le M(1+|\ln d(x,\Gamma)|), \quad x\in\Omega\setminus\partial\Omega,$$

$$|\partial^{|v|}\varphi(x_1,\dots,x_l)/\partial x_1^{v_1}\cdots\partial x_l^{v_l}| \le M/(d(x,\Gamma))^{|v|+\gamma-1}, \quad x\in\Omega\setminus\partial\Omega$$

при $0 < |v| = s$.

4. Вспомогательные предложения

В разделе 3 главы 1 первой части книги приведен ряд утверждений из теории приближений и теории квадратур, используемых как в первой, так и во второй частях книги. Помимо этих утверждений во второй части книги нам понадобятся дополнительные сведения из теории приближений. Изложению этих результатов посвящен данный раздел.

4.1. Аппроксимация алгебраическими полиномами

В этом пункте приводится ряд оценок для аппроксимации алгебраическими полиномами непрерывных функций на сегменте $[-1,1]$. Полученные оценки будут существенно использованы ниже при оценках точности вычисления гиперсингулярных интегралов. Результаты, включенные в данный раздел, ранее опубликованы в работе автора [8]. Случай периодических функций исследован в работах С. Б. Стечкина [68] и D. Gaier [90].

Пусть H_α– множество непрерывных функций, заданных на сегменте $[-1,1]$ и удовлетворяющих условию Гельдера с показателем α. Известно [61], что если на сегменте $[-1,1]$ ввести норму для функций $x \in H_\alpha$ следующим образом:

$$\|x\| = \|x\|_\alpha = M(x) + H(x;\alpha) = \max_{-1\le t\le 1} |x(t)| + \sup_{t_2\ne t_1} \frac{|x(t_2)-x(t_1)|}{|t_2-t_1|^\alpha},$$

то пространство H_α обращается в B-пространство.

Имеет место следующая

Теорема 4.1 [8]. Пусть $x \in W^m H_\alpha(1;[-1,1])$. Тогда, если для некоторого полинома $F_n(t)$ степени не выше n выполняется неравенство

$$|x(t)-F_n(t)| \le \frac{A}{n^{m+\sigma}}\left[(\sqrt{1-t^2})^{m+\sigma} + \frac{|t|}{n^{m+\sigma}}\right] (\sigma\le\alpha), \qquad (4.1)$$

то для любого $r (r \le m)$ справедливо соотношение

$$|x^{(r)}(t)-F_n^{(r)}(t)| \le \frac{B}{n^{m-r+\sigma}}\left[(\sqrt{1-t^2})^{m-r+\sigma} + \frac{|t|}{n^{m-r+\sigma}}\right], \qquad (4.2)$$

где A, B– постоянные, не зависящие от $x(t)$ и n.

Доказательство. Так как $x(t) \in W^m H_\alpha(1;[-1,1])$, то для любого натурального n существует [70, с. 276] алгебраический полином степени не выше n, такой, что

$$|x(t)-P_n(t)| \le \frac{C}{n^{m+\alpha}}\left[\sqrt{1-t^2} + \frac{|t|}{n}\right]^{m+\alpha}. \qquad (4.3)$$

Замечание. В этом разделе через C обозначены различные константы, не зависящие от n и x. Значения этих констант не выписываются, так как они достаточно громоздки.

Исходя из (4.1) и (4.3), разность $x(t) - P_n(t)$ можно, следуя методу, использованному С. Н. Бернштейном, при доказательстве обратных теорем конструктивной теории функций [63] представить в виде

$$x(t) - P_n(t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t), u_k(t) = P_{2^k n}(t) - P_{2^{k-1} n}(t). \tag{4.4}$$

Оценим многочлены u_k, полагая в (4.4) $P_n = F_n$:

а) $k = 1$.

$$|u_1(t)| \leq |P_{2n}(t) - x(t)| + |x(t) - F_n(t)| \leq$$

$$\leq \frac{C(1+2^{m+\sigma})}{(2n)^{m+\sigma}} \left[\sqrt{1-t^2} + \frac{|t|}{(2n)}\right]^{m+\sigma};$$

б) $k \geq 2$.

$$|u_k(t)| \leq |P_{2^k n}(t) - x(t)| + |x(t) - P_{2^{k-1} n}(t)| \leq$$

$$\leq \frac{C(1+2^{m+\alpha})}{(2^k n)^{m+\alpha}} \left[\sqrt{1-t^2} + \frac{|t|}{(2^k n)}\right]^{m+\alpha}. \tag{4.5}$$

Нам понадобится следующее утверждение.

Теорема 4.2 [70, с. 234]. Если алгебраический многочлен $P_n(x)$ всюду на отрезке $-1 \leq x \leq 1$ удовлетворяет неравенству

$$|P_n(x)| \leq \frac{1}{n^r}(\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{n})^r \omega\left[\frac{1}{n}(\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{n})\right]$$

при целом $r \geq 0$, то

$$|P_n'(x)| \leq \frac{C}{n^{r-1}}(\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{n})^{r-1} \omega\left[\frac{1}{n}(\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{n})\right],$$

где $C-$ константа, не зависящая от x и n; $\omega(u)$ $-$ некоторый модуль непрерывности.

Из этого неравенства следует, что $|u_k'| \leq \frac{C}{(2^k n)^{m+\sigma-1}} \left[\sqrt{1-t^2} + \frac{|1|}{2^k n}\right]^{m-1+\sigma}$.

Так как ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |u_k'|$ равномерно сходится, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |u_k(t)|$ можно почленно дифференцировать. Поэтому

$$|x'(t) - F_n'(t)| = \left|\sum_{k=1}^{\infty} u_k'(t)\right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |u_k'(t)|.$$

Отсюда и из (4.5), применяя вышеупомянутое неравенство А. Ф. Тимана, получаем оценку

$$|x'(t) - F_n'(t)| \le$$

$$\le \frac{C(1+2^{m+\alpha})}{n^{m-1+\sigma}} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{\left(\sqrt{1-t^2}\right)^{m-1+\sigma}}{(2^k)^{m-1+\sigma}} + \frac{1}{(2^k)^{m-1+\sigma}} \right] \le$$

$$\le \frac{C(1+2^{m+\alpha})}{(2^{m+\sigma-1}-1)} \frac{1}{n^{m+\sigma-1}} \left[\left(\sqrt{1-t^2}\right)^{m+\sigma-1} + \frac{1}{n^{m+\sigma-1}} \right].$$

Продолжая доказательство по индукции, приходим к (4.2).

Теорема доказана.

Перейдем теперь к оценке аппроксимации непрерывных функций алгебраическими полиномами. Справедлива

Теорема 4.3. Пусть функция $x(t) \in W^m H_\alpha(1; [-1,1])$, $m = 0, 1, \ldots$, $0 < \alpha \le 1$. Тогда существует такой алгебраический полином $P_n(t)$ степени не выше n, что

$$|x(t) - P_n(t)| \le \frac{AH(x^{(m)}; \alpha)}{n^{m+\alpha}} \left[\left(\sqrt{1-t^2}\right)^{m+\alpha} + \frac{1}{n^{m+\alpha}} \right] \qquad (4.6)$$

$$(m = 0, 1, \ldots; n = 0, 1, \ldots);$$

если произвольное число β таково, что $0 < \beta < \frac{\alpha}{2}$, то при $m = 0$ справедливы оценки

$$H(x - P_n; \beta) \le \frac{ACH(x; \alpha)}{n^{(\alpha/2-\beta)}}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

$$\|x - P_n\| \le \frac{ACH(x; \alpha)}{n^{(\alpha/2-\beta)}}, \quad n = 1, 2, \ldots;$$

если произвольное число β таково, что $0 < \beta \le \alpha$, то справедливы оценки

$$H(x - P_n; \beta) \le \frac{ACH(x^{(m)}; \alpha)}{n^{m+\alpha-\beta}} \quad (m = 1, \ldots; n = 1, \ldots), \qquad (4.7)$$

$$\|x - P_n\| \le \frac{ACH(x^{(m)}; \alpha)}{n^{m+\alpha-\beta}} \quad (m = 1, \ldots; n = 1, \ldots). \qquad (4.8)$$

Доказательство. В случае $x(t) \in W^m H_\alpha(1; [-1,1])$ оценка (4.6) следует, как частный случай, из [70, с. 276]. Как и в предыдущей теореме, разность $x(t) - P_n(t)$ представляется в виде

$$x(t) - P_n(t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t),$$

где

$$u_k(t) = P_{2^k n} - P_{2^{k-1} n}(t).$$

Из (4.5) следует, что

$$|u_k(t)| \le \frac{CH(x^{(m)};\alpha)(1+2^{m+\alpha})}{(2^k n)^{m+\alpha}} \left[\left(\sqrt{1-t^2}\right)^{m+\alpha} + \frac{1}{(2^k n)^{m+\alpha}} \right].$$

Пусть $2^s \le n < 2^{s+1}$. Тогда при каждом натуральном k

$$\sum_{i=k}^{\infty} |u_i(t)| \le C \left(\sqrt{1-t^2}\right)^{m+\alpha} \sum_{i=k}^{\infty} \frac{1}{(2^i n)^{m+\alpha}} +$$

$$+C \sum_{i=k}^{\infty} \frac{1}{(2^i n)^{2m+2\alpha}} \le \frac{2^{m+\alpha} C \left(\sqrt{1-t^2}\right)^{m+\alpha}}{(2^{m+\alpha}-1)(2^{k+s})^{m+\alpha}} +$$

$$+ \frac{4^{m+\alpha} C}{4^{m+\alpha}-1} \frac{1}{(2^{k+s})^{2m+2\alpha}}. \tag{4.9}$$

Положим, при любом вещественном h и t

$$\Delta(h,t) = |x(t+h) - P_n(t+h) - x(t) + P_n(t)| =$$

$$= \left| \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t+h) - u_k(t) \right|. \tag{4.10}$$

Можно считать, что $h > 0$, и рассмотреть два случая:

$$\frac{1}{n} < h \le \frac{1}{2}, \quad 0 < h \le \frac{1}{n}.$$

1-й случай: $h > \frac{1}{n}$.
Очевидно,

$$\Delta(h,t) \le 2 \max |x(t) - P_n(t)| \le$$

$$\le \frac{2CH(x^{(m)};\alpha)}{n^{m+\alpha}} \le \frac{2CH(x^{(m)};\alpha)(nh)^{\beta}}{n^{m+\alpha}} \le \frac{2CH(x^{(m)};\alpha)}{n^{m+\alpha-\beta}} h^{\beta}. \tag{4.11}$$

2-й случай: $h \le \frac{1}{n}$.
Рассмотрим сначала случай, когда $m = 0$.

Будем считать, что $h > 0$ и $t \in [0, 1]$, так как остальные случаи сводятся к этому.

Выберем натуральное число k так, чтобы

$$2^k \leq \frac{1}{\sqrt{h}} < 2^{k+1}. \tag{4.12}$$

Константы k и s могут быть связаны между собой одним из двух неравенств: $s \geq k$ и $s < k$.

Пусть выполняется неравенство $s \geq k$.

Тогда из (4.9), (4.12) следует, что

$$\Delta(h, t) \leq 2 \sum_{i=1}^{\infty} |u_i(t)| \leq \frac{2^{1+\alpha} C}{(2^\alpha - 1)(2^{s+1})^\alpha} \leq C h^{\alpha/2}. \tag{4.13}$$

При выполнении неравенства $s < k$

$$\Delta(h, t) \leq \sum_{i=1}^{k-s} |u_i(t+h) - u_i(t)| +$$

$$+ \sum_{i=k-s+1}^{\infty} |u_i(t+h)| + \sum_{i=k-s+1}^{\infty} |u_i(t)|. \tag{4.14}$$

Оценим первую сумму, используя последовательно теорему о среднем Лагранжа и неравенство А. А. Маркова [63]. В результате имеем

$$\sum_{i=1}^{k-s} |u_i(t+h) - u_i(t)| \leq h \sum_{i=1}^{k-s} |u_i'(t + \theta h)| \leq$$

$$\leq h \sum_{i=1}^{k-s} \frac{(2^i n)^2 C_3 C_1}{(2^i n)^\alpha} \leq C h^{\alpha/2}. \tag{4.15}$$

Оценим теперь вторую сумму из неравенства (4.14) (третья оценивается аналогично):

$$\sum_{i=k-s+1}^{\infty} |u_i(t+h)| \leq C h^{\alpha/2}. \tag{4.16}$$

Из (4.14) $-$ (4.16) следует, что в этом случае

$$\Delta(h, t) \leq C h^{\alpha/2}. \tag{4.17}$$

Собирая вместе оценки (4.13), (4.17), убеждаемся в справедливости (при $m = 0$) неравенства:

$$\Delta(h, t) \leq C h^{\alpha/2}. \tag{4.18}$$

Так как $h \leq \frac{1}{n}$, то из (4.18) следует, что $\Delta(h,t) \leq Ch^{\beta} n^{-(\alpha/2-\beta)}$.

Рассмотрим теперь случай $m \geq 1$.

Применяя последовательно теорему о среднем Лагранжа, оценку (4.5), теорему 4.2, находим, полагая $h > 0$, $t > 0$ (остальные случаи сводятся к этому), что

$$\Delta(h,t) = \left|\sum_{k=1}^{\infty} u_k(t+h) - u_k(t)\right| = \left|\sum_{k=1}^{\infty} h u_k'(t+\theta h)\right| \leq$$

$$\leq h \sum_{k=1}^{\infty} |u_k'(t+\theta h)| \leq \frac{C_1 h}{n^{m+\alpha-1}} \frac{\left(\sqrt{1-t^2}\right)^{m+\alpha-1}}{2^{m+\alpha-1}-1} +$$

$$+ \frac{Ch}{n^{2(m+\alpha-1)}(4^{m+\alpha-1}-1)} \leq$$

$$\leq \frac{Ch}{(2^{m+\alpha-1}-1)n^{m+\alpha-1}} \left[\left(\sqrt{1-t^2}\right)^{m+\alpha-1} + \frac{1}{n^{m+\alpha-1}}\right]. \tag{4.19}$$

Так как $nh \leq (nh)^{\beta}$, то

$$\Delta(h,t) \leq \frac{Cnh}{n^{m+\alpha}} \left[\left(\sqrt{1-t^2}\right)^{m+\alpha-1} + \frac{1}{n^{m+\alpha-1}}\right] \leq$$

$$\leq \frac{Ch^{\beta}}{n^{m+\alpha-\beta}} \left[\left(\sqrt{1-t^2}\right)^{m+\alpha-1} + \frac{1}{n^{m+\alpha-1}}\right].$$

Отсюда и из (4.18) следует, что

$$H(x-P_n;\beta) \leq \frac{ACH(x^{(m)};\alpha)}{n^{m+\alpha-\beta}}.$$

Из последнего неравенства и из (4.7) получаем, что

$$\|x-P_n\| \leq \frac{A_1 CH(x^{(m)};\alpha)}{n^{m+\alpha-\beta}}.$$

Теорема доказана.

Из теорем 4.1 и 4.2 следует

Теорема 4.4. Пусть выполнены условия теоремы 4.3. Тогда при $r = 1, 2, \ldots m-1$ справедливы оценки:

$$H(x^{(r)} - P_n^{(r)};\beta) \leq \frac{A(r)H(x^{(m)};\alpha)}{n^{m+\alpha-r-\beta}},$$

$$\|x^{(r)} - P_n^{(r)}\| \leq \frac{A_1 H(x^{(m)};\alpha)}{n^{m+\alpha-r-\beta}},$$

где $A(r)$, $A_1(r)$– постоянные, зависящие лишь от r.

5. Обзор приближенных методов вычисления гиперсингулярных интегралов

Несмотря на то что понятие гиперсингулярного интеграла было введено Ж. Адамаром в 1903 г. (см. [91]), его широкое применение к решению задач физики и техники датируется значительно позже.

По-видимому, первой работой, в которой гиперсингулярные интегралы применялись в аэродинамике, была монография А. И. Некрасова [64].

Позднее появилось несколько фундаментальных работ (Х. Эшли, М. Лэндал [72], Р. Бисплингхофф, Х. Эшли, Р. Халфмен [6]), в которых гиперсингулярные интегралы привлекались к решению задач механики и аэродинамики.

Тем более странным кажется, что численные методы решения гиперсингулярных интегральных уравнений и вычисления гиперсингулярных интегралов как отдельное направление вычислительной математики начинают развиваться только с конца шестидесятых годов прошлого века.

По-видимому, первой работой, непосредственно посвященной приближенному вычислению гиперсингулярных интегралов, является статья B. W. Ninham [109], в которой последний, используя методы теории обобщенных функций [40], интерпретирует расходящиеся интегралы как специальным образом построенные интегральные суммы.

Первыми работами, непосредственно посвященными приближенному решению гиперсингулярных интегральных уравнений, были, по-видимому, статьи И. В. Бойкова [8], [9].

Начиная с 70-х г. г. прошлого века отмечается все возрастающий интерес к приближенным методам вычисления гиперсингулярных интегралов и решения гиперсингулярных интегральных уравнений. Это связано с тем, что методы гиперсингулярных интегральных уравнений находят все большее применение в задачах аэродинамики [4], [5], электродинамики [34], ядерной физики [58], геофизики [32], [33].

В отечественной литературе при построении квадратурных и кубатурных формул гиперсингулярные интегралы разделяются на два больших класса: гиперсингулярные интегралы с фиксированной сингулярностью

$$J\varphi = \int\limits_{-1}^{1} \frac{\varphi(\tau)}{(\tau - c)^p} d\tau, \quad c = \text{const}, \quad -1 < \text{c} < 1, \tag{5.1}$$

и гиперсингулярные интегралы с переменной сингулярностью

$$H\varphi = \int\limits_{-1}^{1} \frac{\varphi(\tau)}{(\tau - t)^p} d\tau, \quad -1 < t < 1. \tag{5.2}$$

В зарубежной литературе подобного разделения, как правило, не делают. Нам представляется естественным подобное разделение, так как для вычисления интегралов $J\varphi$ и $H\varphi$ предлагаются различные вычислительные схемы и получаются различные оценки.

Ниже всюду в работе при рассмотрении интегралов с фиксированными особенностями полагаем $c = 0$. Это, как будет видно из дальнейшего, ни в какой степени не уменьшает общности рассуждений.

Для вычисления гиперсингулярных интегралов с фиксированными особенностями вида $F\varphi = \int\limits_{-1}^{1} \frac{\varphi(\tau)}{|\tau|^{p+\lambda}} d\tau$, $I\varphi = \int\limits_{-1}^{1} \frac{\varphi(\tau)}{\tau^p} d\tau$ используются квадратурные формулы, основанные на различных подходах. Основной метод построения квадратурных формул для вычисления интегралов $F\varphi$ и $I\varphi$ заключается в замене подынтегральной функции $\varphi(t)$ n-мерным аппаратом приближения: интерполяционными полиномами, сплайнами, отрезками ортогональных рядов и т. д. Достаточно подробная библиография, посвященная вычислению интегралов $F\varphi$ и $I\varphi$, содержится в монографии И. В. Бойкова, Н. Ф. Добрыниной, Л. Н. Домнина [24]. В [24] построены асимптотически оптимальные и оптимальные по порядку квадратурные формулы вычисления интегралов $F\varphi$ и $I\varphi$ на классах функций $W_p^r(1)$. Несмотря на неулучшаемость по порядку величины погрешности этих формул на классах функций $W_p^r(1)$, их применение вызывает значительные трудности. Например, если функция $\varphi(t)$ аппроксимируется интерполяционным полиномом $\varphi_n(t)$ или сплайном $s_n(t)$, то вычисление интегралов $F(\varphi_n(t))$, $F(s_n(t))$, $I(\varphi_n(t))$, $I(s_n(t))$ требует значительной "ручной"работы, связанной с вычислением соответствующих интегралов. Построению оптимальных по порядку квадратурных формул, допускающих непосредственную реализацию на компьютерах, посвящены работы [77], [78].

Другой, часто используемый метод состоит в предварительной регуляризации гиперсингулярного интеграла.

Этот метод был использован A. Ossicini [110]. Согласно этому методу гиперсингулярный интеграл представляется в виде

$$\int\limits_a^b \frac{\varphi(\tau)d\tau}{(b-\tau)^{p+1}} = \int\limits_a^b \frac{1}{(b-\tau)^{p+1}} \left(\varphi(\tau) - \sum_{k=0}^{r} \varphi^{(k)}(b) \frac{(\tau-b)^k}{k!} \right) d\tau +$$

$$+ \sum_{k=0}^{r} \frac{\varphi^{(k)}(b)}{k!} \int\limits_a^b \frac{d\tau}{(b-\tau)^{p+1-k}},$$

где первый интеграл справа вычисляется по квадратурным формулам, а остальные слагаемые – по определению интеграла Адамара.

В циклах работ И. В. Бойкова, Н. Ф. Добрыниной [16] – [22], И. В. Бойкова, С. Я. Нагаевой [26] – [28], статьях Н. Ф. Добрыниной, Л. Н. Домнина [46], [47] квадратурные формулы интерполяционного типа были построены для вычисления гиперсингулярных интегралов

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho(\tau)\varphi(\tau)}{\tau^p} d\tau, \quad \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho(\tau)\varphi(\tau)}{|\tau|^{p+\lambda}} d\tau$$

на различных весовых классах функций.

Для вычисления гиперсингулярных интегралов

$$H\varphi = \int\limits_{-1}^{1} \frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-t)^p}, \quad p = 2, 3, \ldots, \quad -1 < t < 1, \tag{5.3}$$

$$G\varphi = \int\limits_{-1}^{1} \frac{\varphi(\tau)d\tau}{|\tau-t|^{p+\lambda}},\ p = 1, 2, \ldots, 0 < \lambda < 1, -1 \le t \le 1, \tag{5.4}$$

различными авторами построены квадратурные формулы, которые условно можно разделить на две большие группы: квадратурные формулы интерполяционного типа и квадратурные формулы типа Гаусса.

К первой группе относятся квадратурные формулы, основанные на замене подынтегральной функции $\varphi(t)$ интерполяционными полиномами, сплайнами, отрезками рядов по ортогональным функциям и т. д.

Ко второй группе относятся квадратурные формулы, основанные на представлении гиперсингулярных интегралов, скажем интеграла $H\varphi$, в виде

$$(H\varphi)(t) = \varphi(t) \int\limits_{-1}^{1} \frac{d\tau}{(\tau-t)^p} + \int\limits_{-1}^{1} \frac{\varphi(\tau)-\varphi(t)}{(\tau-t)^p} d\tau \tag{5.5}$$

и в применении к последнему интегралу квадратурных формул Гаусса.

Вначале остановимся на обзоре работ, относящихся к первой группе.

Интерполяционно-квадратурная формула для вычисления интеграла в смысле Коши – Адамара

$$H\varphi = \int\limits_{-1}^{1} \frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau - t)^2}, \quad |t| < 1, \quad \varphi(\pm 1) = 0,$$

встречающегося в теории несущей поверхности, получена С.И. Гур-Мильнером [42], [43].

Для вычисления на классе периодических функций $\tilde{W}^r(1)$ гиперсингулярного интеграла $\frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{2\pi}\varphi(\tau)\sin^{-2}\frac{\tau-t}{2}d\tau$ И. В. Бойковым, Н. Ф. Добрыниной, Л. Н. Домниным построена [24] оптимальная по порядку (по точности) квадратурная формула.

Работы И. В. Бойкова и Н. Ф. Добрыниной [18] – [22], Н. Ф. Добрыниной [45] посвящены построению оптимальных по порядку формул вычисления интегралов Адамара (5.3) и (5.4).

Ими же для вычисления интегралов (5.1) и (5.2) и

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho(\tau)\varphi(\tau)}{(\tau - t)^p} d\tau, \quad p = 2, 3, \ldots; \tag{5.6}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\tau)}{|\tau - t|^{p+\lambda}} d\tau, \quad p = 1, 2, \ldots, \quad 0 < \lambda < 1 \tag{5.7}$$

предложен удобный в практическом отношении и достаточно эффективный алгоритм, основанный на замене интегралов (5.3)–(5.7) предельными соотношениями, полученными на основе аналогов формулы Сохоцкого – Племеля для гиперсингулярных интегралов. Эти квадратурные формулы являются трансформацией метода компенсирующих нагрузок, развиваемого Э. С. Вентцелем и его учениками, на гиперсингулярные интегралы. Исследования этих авторов подытожены в [36].

В статье B. Bialecki [73] рассматривается интеграл Адамара

$$\int\limits_{\gamma} \frac{\varphi(\tau)}{(\tau - t)^p} d\tau, \tag{5.8}$$

где γ– гладкая дуга в плоскости комплексной переменной.

В этой работе функции Котельникова – Уиттекера – Шеннона, подробно исследованные в [115], используются для построения квадратурных формул вычисления интегралов вида (5.8) в предположении, что функция $\varphi(t)$ аналитическая в области D, внутри которой находится контур γ. Отдельно рассматривается случай $\gamma = (-1, 1)$.

Большой цикл работ [24], [73], [75], [77], [78], [92], [98] посвящен построению квадратурных формул, основанных на замене подынтегральной функции $\varphi(t)$ интерполяционными полиномами Лагранжа по различным системам узлов и сплайнами.

В результате гиперсингулярные интегралы приближаются квадратурными формулами вида

$$\int\limits_a^b \omega(\tau)\frac{\varphi(\tau)}{(\tau-t)^p}d\tau = \sum_{k=1}^N p(t)\varphi(t_k) + R_N(\varphi, t). \tag{5.9}$$

В работе P. Linz [102] предложена и исследуется квадратурная формула для вычисления интеграла (5.3) при $p = 2$, основанная на аппроксимации функции $\varphi(t)$ сплайном порядка 2, построенным по равномерному разбиению сегмента $[-1, 1]$.

В работе [87] предложена квадратурная формула вычисления интеграла (5.3), основанная на замене функции $\varphi(t)$ интерполяционными полиномами по равноотстоящим узлам и B-сплайнами. На классе функций $W^r(1)$, $r \geq p$ для этих квадратурных формул вычислена константа Пеано в слабой асимптотике.

В работе [88] для вычисления гиперсингулярного интеграла (5.3) предложен следующий алгоритм. Функция φ аппроксимируется локальным сплайном $\varphi_N(t)$, построенным по равноотстоящей сетке. Значения интеграла

$$\int\limits_{-1}^1 \frac{\varphi_N(\tau)}{(\tau-t)^p}d\tau$$

в точках t, $-1 < t < 1$, вычисляются по определению гиперсингулярного интеграла. Для предложенной квадратурной формулы вычислена константа Пеано на классе функций $W^r(1)$.

В работе [36] некоторые типы граничных задач теории пластин и оболочек сводятся к граничным интегральным уравнениям с интегралом Адамара вида (5.9), где $p = 2, 3$.

Исследуются вопросы приближенного вычисления интегралов вида

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1-\tau^2}}{(\tau-t)^p}d\tau,\quad p=2,3,4,$$

используя аппроксимацию $\varphi(\tau)$ в виде отрезка ряда Фурье по полиномам Чебышева второго рода и по полиномам Гегенбауера. Рассматриваются также интегралы, имеющие одновременно сингулярности различных видов.

В работе [38] исследуются интерполяционные квадратурные формулы для вычисления сингулярных интегралов

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{2\pi}\frac{\varphi(\sigma)d\sigma}{2\sin^2\frac{\sigma-s}{2}},\quad s\in[0,2\pi],$$

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\frac{\varphi(\tau)}{(\tau-t)^2}\sqrt{1-\tau^2}d\tau,\quad t\in(-1,1).$$

В первом интеграле $\varphi(\sigma)$ заменяется интерполяционным полиномом по равноотстоящим узлам, во втором – по узлам полинома Чебышева первого рода. Затем, пользуясь определением интеграла Адамара, строятся квадратурные формулы.

Подробное изложение теории гиперсингулярных интегралов в комплексной области дано в монографии А. М. Линькова [54]. Там же рассмотрены многочисленные приложения гиперсингулярных интегралов в комплексной области к задачам механики.

В работах А. М. Линькова и С. Г. Могилевской [55], [101] строятся квадратурные формулы интерполяционного вида для вычисления интегралов Адамара

$$\int\limits_{\gamma}\frac{\varphi(\tau)}{(\tau-t)^2}d\tau$$

в комплексной области на непрерывных кривых γ, имеющих точки излома.

В работах [55], [101] рассматриваются интегральные уравнения вида

$$\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{x(\tau)}{(\tau-t)^2}d\tau+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}x(\tau)\frac{\partial^2}{\partial t\partial\tau}\ln\frac{\tau-t}{\bar\tau-\bar t}d\tau+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\bar{x}(\tau)\frac{\partial^2}{\partial\bar{t}\partial\bar{\tau}}\ln\frac{\tau-t}{\bar{\tau}-\bar{t}}d\bar{\tau}=f(t),$$

которые решаются приближенными методами. Приводятся и исследуются квадратурные формулы вычисления интегралов Адамара с различными особенностями.

A. C. Kaya и F. Erdogan [97] для вычисления гиперсингулярного интеграла

$$\int\limits_a^b \frac{x(\tau)}{(\tau-t)^p}d\tau$$

используют определение интегралов Адамара и некоторые специальные приемы. Точно вычислено большое число интегралов при $p = 2$ и при различных весах от степенных функций при целой степени, от полиномов Лежандра и Чебышева.

В частности, вычислены следующие интегралы:

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\frac{\tau^n\sqrt{1-\tau^2}}{\tau-t}d\tau,\quad \frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\frac{\tau^n\sqrt{1-\tau^2}}{(\tau-t)^2}d\tau,\quad (n\geq 1);$$

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\frac{\tau^n d\tau}{(\tau-t)\sqrt{1-\tau^2}},\quad \frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\frac{\tau^n d\tau}{(\tau-t)^2\sqrt{1-\tau^2}},\quad (n\geq 2);$$

$$\int\limits_{-1}^{1}\frac{\tau^n\sqrt{1-\tau}}{(\tau-t)^2}d\tau,\quad \int\limits_{-1}^{1}\frac{\tau^n d\tau}{(\tau-t)\sqrt{1-\tau}}d\tau,\quad (n\geq 0),$$

а также вычислен ряд гиперсингулярных интегралов от классических ортогональных многочленов.

В работе А. И. Бойковой [30] построены интерполяционные полиномы по узлам ортогональных многочленов. На основе этих полиномов ею построены [31], [79], [80] оптимальные по порядку интерполяционные квадратурные формулы вычисления гиперсингулярных интегралов

$$\int\limits_{-1}^{1}\frac{p(\tau)\varphi(\tau)}{(\tau-t)^2}d\tau$$

с весами $\sqrt{1-\tau^2}$, $(1-\tau^2)^{-1/2}$, $((1-\tau)/(1+\tau))^{1/2}$, $((1+\tau)/(1-\tau))^{1/2}$.

В статье J. C. Mason и E. Venturino [104] рассматривались методы вычисления векторных сингулярных и гиперсингулярных интегралов на кривых, параметризация которых неизвестна. Рассматриваются, в частности, интегралы вида

$$\int\limits_L \frac{\varphi(\tau)d\tau}{r(\tau,t)^2}, \quad t\in L,$$

у которых контур L определен лишь в конечном числе точек. Здесь $r(t,\tau)-$ расстояние между точками t и τ в евклидовой метрике.

Интересная квадратурная формула для вычисления гиперсингулярных интегралов с фиксированными особенностями предложена в [98]. (В этой работе она построена сразу для интегралов с фиксированными особенностями вида $\ln|x|$, $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x^2}$. Нетрудно видеть, что она остается справедливой и для сингулярностей вида $\frac{1}{x^p}$, $p=3,4,\ldots$).

Пусть $x_1,\ldots,x_N$ и $p_1,\ldots,p_N$ означает N узлов и коэффициентов квадратурной формулы Гаусса на сегменте $[-1,1]$; $P_n(x)$ означает интерполяционный полином Лежандра степени n, $n=0,1,\ldots,N-1$. Тогда квадратурная формула

$$\int\limits_{-1}^{1} \omega(\tau)\varphi(\tau)d\tau = \sum_{n=1}^{N} p_n\varphi(x_n) + R_N(\varphi),$$

где $\omega(t)=\ln|t|$, t^{-1}, t^{-2},

$$p_n = \omega_n \sum_{j=0}^{N-1}\left(\frac{2j+1}{2}P_j(x_n)\int\limits_{-1}^{1}\omega(\tau)P_j(\tau)d\tau\right),$$

$$\omega_n = \int\limits_{-1}^{1}\prod_{j=1,j\neq n}^{N}\left(\frac{x-x_j}{x_n-x_j}\right)^2 dx, \quad n=1,2,\cdots,N,$$

справедлива для полиномов до $N-1$ степени. Ее погрешность равна $R_N(\varphi)\asymp N^{-k}$ для функций $\varphi(t)\in W^k(1)$.

В работе [98] для вычисления гиперсингулярного интеграла (4.2) при $p=2$ предложена квадратурная формула, использующая узлы и коэффициенты формулы Гаусса, определенной на сегменте $[-1,1]$.

Обозначим через $P_j(t)$ и $Q_j(t)$, $j=0,1,\ldots,N-1$, интерполяционный полином Лежандра и функцию Лежандра второго рода, а через $x_1,\ldots,x_N$ и $\omega_1,\ldots,\omega_N-$ узлы и коэффициенты квадратурной формулы Гаусса, определенные на сегменте $[-1,1]$.

Пусть

$$\omega_{3,n}(t) = \omega_n\left(-\sum_{j=0}^{N-2}\sum_{k=j}^{[(N+j-3)/2]}(2j+1)(4k+3-2n)Q_j(t)P_{2k+1-n}(x_n)+\right.$$

$$+\sum_{j=0}^{N-1}\frac{2j+1}{2}P_j(x_n)\left(\frac{1}{t-1}-\frac{(-1)^j}{t+1}\right)\Bigg),$$

$n = 1, 2, \ldots, N$.

Тогда для любой точки $t \in (-1, 1)$ квадратурная формула

$$\int_{-1}^{1}\frac{\varphi(\tau)}{(\tau-t)^2}d\tau = \sum_{n=1}^{N}\omega_{3,n}(t)\varphi(x_n) + R_N(\varphi)$$

точна для полиномов $(N-1)$-го порядка.

Асимптотическое разложение интегралов Адамара вида

$$\int_a^b K(x, \lambda x)f(x)dx, \quad 0 \le a < b \le \infty, \tag{5.10}$$

по степеням λ, где $\lambda-$ большой параметр, исследовалось в работах [74], [83], [114], [117]. В интеграле (5.10) ядра имеют логарифмические и степенные особенности с показателем $-\alpha$, где $\mathrm{Re}\alpha > 1$.

В 1981 D. F. Paget [111], [112] предложил формулу типа Гаусса для вычисления сингулярных интегралов

$$\int_a^b \omega(\tau)\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau = \sum_{i=1}^{n}h_i\frac{\varphi(t_i)-\varphi(t)}{t_i-t} + f(t)\int_a^b\frac{\omega(\tau)}{\tau-t}d\tau,$$

где $\{t_i\}$, $\{h_i\}-$ узлы и коэффициенты квадратурной формулы Гаусса для вычисления интегралов Римана от непрерывных функций с весовым множителем $\omega(t)$. В той же работе он распространил предыдущую формулу на гиперсингулярные интегралы

$$\int_a^b \omega(\tau)\frac{\varphi(\tau)}{(\tau-t)^2}d\tau \approx$$

$$\approx \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n}h_i\left[\frac{\varphi(t_i)-\varphi(t)}{(t_i-t)^2}-\frac{\varphi'(t)}{t_i-t}\right] + q_0'(x)\varphi(t) + q_0(x)\varphi'(t), \quad x \ne t_i, \\ \sum\limits_{i=1, i\ne j}^{n}h_i\left[\frac{\varphi(t_i)-\varphi(t_j)}{(t_i-t_j)^2}-\frac{\varphi'(t_j)}{t_i-t_j}\right] + \\ +\frac{1}{2}\varphi''(t_j) + q_0'(t_i)\varphi(t_j) + q_0(t_j)\varphi'(t_j), \quad t = t_j, \end{cases}$$

а также оценил погрешность квадратурной формулы в предположении, что функция $\varphi(t)$ аналитически продолжима с сегмента $[a, b]$.

N. I. Ioakimidis, P. S. Theocaris [96] в 1979 г. и Ioakimidis [95] в 1985 г. исследовали применимость квадратурной формулы Гаусса к гиперсингулярным интегралам с более высоким порядком сингулярности

$$\int\limits_a^b \omega(\tau)\frac{\varphi(\tau)}{(\tau-t)^{p+1}}d\tau = \sum_{i=1}^n \frac{h_i}{(t_i-t)^{p+1}}\left[\varphi(t_i) - \sum_{k=0}^p \frac{\varphi^{(k)}(t)}{k!}(t_i-t)^k\right] +$$
$$+ \sum_{k=0}^p \frac{c_k}{k!}\varphi^{(k)}(t) + R_n(\varphi;t), \quad x \neq t_i, \tag{5.11}$$

где $c_k = \int\limits_a^b \frac{\omega(\tau)}{(\tau-t)^{p+1-k}}d\tau$.

В случае, когда $t = t_i$, строится аналогичная квадратурная формула, в которую входит производная $\varphi^{(p+1)}(t)$. N. I. Ioakimidis [95] оценил погрешность квадратурной формулы (5.11) на классе функций $W^r H_\alpha$, где $r > p+1$.

Предлагается также (G. Monegato [106]) в предыдущей формуле функцию $\varphi(t)$ заменить интерполяционной формулой Эрмита, использующей при своем построении производные до p-го порядка в точке t.

В случае, если особая точка t в гиперсингулярном интеграле совпадает с узлом квадратурной формулы Гаусса, квадратурная формула для вычисления интегралов вида

$$\int\limits_a^b \omega(\tau)\frac{\varphi(\tau)}{(\tau-t)^{p+1}}d\tau$$

исследована G. Monegato [105], [106], [107].

В статье G. Criscuolo [85] рассматривается приближенный метод вычисления гиперсингулярных интегралов

$$H_p(\omega,f,t) = \int\limits_{-1}^1 \frac{\omega(t)f(\tau)d\tau}{(\tau-t)^{p+1}}, \quad |t|<1, \quad p=1,2,\dots$$

с весовой функцией $\omega(\tau)$ квадратурными формулами вида

$$H_{p,m}(w,f,t) =$$
$$= \sum_{k=1}^m \lambda_{km}\left\{1 - \frac{p_{m-1}(\omega,x_{k,m})}{p_{m-1}(\omega,x_c)}\right\}\frac{f(x_{k,m})}{(x_{k,m}-t)^{p+1}}\sum_{j=0}^p \frac{f^{(j)}(t)}{j!}(x_{k,m}-t)^j +$$
$$+ \sum_{j=0}^p \frac{f^{(j)}(t)}{j!}\int\limits_{-1}^1 \frac{\omega(\tau)d\tau}{(\tau-t)^{p+1-j}} + R_{p,m}(\omega,f). \tag{5.12}$$

Здесь $R_{p,m}(\omega, f)$– погрешность вычислений, $\{p_m(\omega)\}_0^\infty$– система ортогональных полиномов с весом $\omega(t)$ и старшим коэффициентом $\gamma_m > 0$, $x_{1,m}, \ldots, x_{m,m}$– нули полинома $p_m(t)$, расположенные на сегменте $[-1, 1]$; через $x_c = x_c(t, m)$ обозначен ближайший к t корень $x_{1,m}, \ldots, x_{m,m}$. В случае, если таких корней два, то в качестве x_c может быть взят любой из них.

Относительно квадратурной формулы (5.12) в [85] доказано следующее утверждение.

Пусть $\omega(t) = (1-t)^\alpha (1+t)^\beta$, $\alpha, \beta > -1$. Пусть $f \in W^p$ и $\int\limits_0^1 \frac{\omega(f^{(p)},\delta)}{\delta} d\delta < < \infty$, где ω– модуль непрерывности. Если $\alpha, \beta \geq 1/2$, то оценка

$$|R_{p,m}(\omega, f, t,)| \leq AE_{m-p}(f^{(p)}) \ln m, \tag{5.13}$$

$m \geq 4p + 4$, выполняется равномерно в $(-1, 1)$. Если $0 \leq \alpha, \beta < 1/2$, то эта оценка справедлива в любом замкнутом сегменте, принадлежащем $(-1, 1)$. Более того, если $-1 < \alpha, \beta < 0$ и $f^{(q)} \in H_\lambda$, $0 < \lambda \leq 1$, $q \geq p$, то оценка $|R_{p,m}(\omega, f, t)| \leq Am^{-\lambda-q+p} \ln m$, $m \geq 4p+4$, справедлива в любом сегменте, принадлежащем $(-1, 1)$.

Несмотря на достаточно высокий порядок сходимости, квадратурная формула (5.12) обладает двумя существенными недостатками:

1) при построении вычислительной схемы используются значения функции $f(t)$ и ее производных до p-го порядка в точке t, в которой вычисляется гиперсингулярный интеграл. В случае, когда рассматривается гиперсингулярный интеграл с переменной сингулярностью и вычисления осуществляются на достаточно густой сетке значений параметра t, формула (5.12) является неэффективной;

2) при построении квадратурной формулы (5.12) используются значения производных до p-го порядка от функции $f(t)$. Известно, что операция вычисления производной является некорректной, что затрудняет практическое применение формулы (5.12) и аналогичных формул.

Гиперсингулярные интегралы от функций нескольких независимых переменных можно разделить на две группы: полигиперсингулярные интегралы и собственно многомерные гиперсингулярные интегралы.

К первой группе относятся гиперсингулярные интегралы вида

$$\int\limits_{-1}^{1} \cdots \int\limits_{-1}^{1} \frac{\varphi(\tau_1, \ldots, \tau_l) d\tau_1 \cdots d\tau_l}{\tau_1^{p_1} \tau_2^{p_2} \cdots \tau_l^{p_l}}, \tag{5.14}$$

$$\int_{-1}^{1}\cdots\int_{-1}^{1}\frac{\varphi(\tau_1,\ldots,\tau_l)d\tau_1\cdots d\tau_l}{(\tau_1-t_1)^{p_1}(\tau_2-t_2)^{p_2}\cdots(\tau_l-t_l)^{p_l}}, \tag{5.15}$$

$$\int_{-1}^{1}\cdots\int_{-1}^{1}\frac{\varphi(\tau_1,\ldots,\tau_l)d\tau_1\cdots d\tau_l}{|\tau_1|^{p_1+\lambda_1}|\tau_2|^{p_2+\lambda_2}\cdots|\tau_l|^{p_l+\lambda_l}}, \tag{5.16}$$

$$\int_{-1}^{1}\cdots\int_{-1}^{1}\frac{\varphi(\tau_1,\ldots,\tau_l)d\tau_1\cdots d\tau_l}{|\tau_1-t_1|^{p_1+\lambda_1}|\tau_2-t_2|^{p_2+\lambda_2}\cdots|\tau_l-t_l|^{p_l+\lambda_l}}, \tag{5.17}$$

где $p_i=2,3,\ldots,\ 0\le\lambda_i\le 1,\ i=1,2,\ldots,l,$

$$\int_{-1}^{1}\cdots\int_{-1}^{1}\frac{\varphi(\tau_1,\ldots,\tau_l)}{\tau_1^p}d\tau_1\cdots d\tau_l,\quad p=l+1,\ldots, \tag{5.18}$$

$$\int_{-1}^{1}\cdots\int_{-1}^{1}\frac{\varphi(\tau_1,\ldots,\tau_l)}{|\tau_1|^{p+\lambda}}d\tau_1\cdots d\tau_2,\quad p=l,l+1,\ldots,\quad 0<\lambda<1. \tag{5.19}$$

Ко второй группе относятся интегралы вида

$$\int_{-1}^{1}\cdots\int_{-1}^{1}\frac{\varphi(\tau_1,\ldots,\tau_l)d\tau_1\cdots d\tau_l}{(\tau_1^2+\tau_2^2+\cdots+\tau_l^2)^{p/2}}, \tag{5.20}$$

$$\int_{-1}^{1}\cdots\int_{-1}^{1}\frac{\varphi(\tau_1,\ldots,\tau_l)d\tau_1\cdots d\tau_l}{((\tau_1-t_1)^2+\cdots(\tau_l-t_l)^2)^{p/2}}, \tag{5.21}$$

$p=l,l+1,\cdots$

$$\int_{-1}^{1}\cdots\int_{-1}^{1}\frac{\varphi(\tau_1,\ldots,\tau_l)}{(\tau_1^2+\cdots+\tau_l^2)^{(\lambda+p)/2}}d\tau_1\cdots d\tau_l, \tag{5.22}$$

$$\int_{-1}^{1}\cdots\int_{-1}^{1}\frac{\varphi(\tau_1,\ldots,\tau_l)d\tau_1\cdots d\tau_l}{((\tau_1-t_1)^2+\cdots+(\tau_l-t_l)^2)^{(\lambda+p)/2}}, \tag{5.23}$$

p — целое число, $p=l,l+1,\cdots,0<\lambda<1.$

В работе [106] рассматриваются интегралы вида

$$\int_T K_p(t,\tau)\varphi(\tau)d\tau,\quad t\in T\subset R^2, \tag{5.24}$$

где r,Θ — полярные координаты,

$$K_p(t,\tau)=\sum_{l=0}^{p+1}\frac{f_{p-1}(t,\Theta)}{r^{p+2-l}}+K^*(t,r,\Theta).$$

Для построения кубатурной формулы интеграл (5.24) записывается в полярных координатах и представляется в виде последовательности двух одномерных интегралов: регулярного и гиперсингулярного. Первый из них вычисляется по квадратурным формулам Гаусса–Лежандра или Гаусса–Лобатто, а второй – по квадратурным формулам вычисления гиперсингулярных интегралов вида (5.9).

Ю. Ф. Захаровой [48]–[51] построены оптимальные по порядку кубатурные формулы для вычисления гиперсингулярных интегралов

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\tau_1, \ldots, \tau_l) e^{-\lambda(|t_1|+\cdots+|t_2|)}}{(t_1^2 + t_2^2 + \cdots + t_l^2)^p} d\tau_1 \cdots d\tau_l$$

при различных сочетаниях параметров λ и p и при ряде других весовых функций.

Для приближенного вычисления гиперсингулярных интегралов вида

$$\int_{\gamma_1} \cdots \int_{\gamma_l} \frac{\varphi(\tau_1, \ldots, \tau_l) d\tau_1 \cdots d\tau_l}{(\tau_1 - t_1)^{p_1} (\tau_2 - t_2)^{p_2} + \cdots (\tau_l - t_l)^{p_l}}, \tag{5.25}$$

где $\gamma_i (i = 1, 2, \ldots, l)$– единичная окружность с центром в начале координат плоскости комплексной переменной z_i, в цикле работ И. В. Бойкова и Н. Ф. Добрыниной [19] – [22] и в работах И. В. Бойкова, Н. Ф. Добрыниной и Л. Н. Домнина [23], [24] предложены различные методы, основанные как на аппроксимации подынтегральной функции интерполяционными полиномами или сплайнами, так и на продолжении параметров t_i, $i = 1, 2, \ldots, l$ с окружностей γ_i $(i = 1, 2, \ldots, l)$ на плоскости комплексной переменной z_i $(i = 1, 2, \ldots, l)$.

Аналогичные результаты при различных весовых функциях $\rho(t_1, \cdots, t_l)$ получены и для интегралов вида (5.17), (5.23) и интегралов

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \rho(\tau_1, \ldots, \tau_l) \frac{\varphi(\tau_1, \ldots, \tau_l) d\tau_1 \cdots d\tau_l}{(\tau_1 - t_1)^{p_1} \cdots (\tau_l - t_l)^{p_l}}, \tag{5.26}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \rho(\tau_1, \ldots, \tau_l) \frac{\varphi(\tau_1, \ldots, \tau_l)}{((\tau_1 - t_1)^2 + \cdots + (\tau_l - t_l)^2)^{p/2}} d\tau_1 \cdots d\tau_l, \tag{5.27}$$

где p – целое число, $p > l$.

Ю. Ф. Захаровой построены [48]–[51] оптимальные по порядку кубатурные формулы вычисления интегралов (5.26)–(5.27).

Для численного решения широкого класса задач аэродинамики С. М. Белоцерковский [5] предложил метод дискретных вихрей. И. К. Лифанов распространил метод дискретных вихрей на интегральные уравнения с интегралом в смысле Адамара. В связи с этим им построены [57] (с. 315−330) по методу дискретных вихрей кубатурные формулы вычисления интегралов вида

$$\int\limits_a^b\int\limits_c^d \frac{\varphi(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2}{((\tau_1-t_1)^2+(\tau_2-t_2)^2)^{3/2}}$$

и

$$\int\limits_a^b\int\limits_c^d \frac{\varphi(\tau_1,\tau_2)}{(\tau_2-t_2)^2}\frac{\tau_1-t_1}{\sqrt{(\tau_1-t_1)^2+(\tau_2-t_2)^2}}d\tau_1 d\tau_2.$$

В книге [34] предложены алгоритмы вычисления гиперсингулярных интегралов

$$\int\int\limits_{\sigma} \frac{\varphi(\tau_1,\tau_2,\tau_3)}{(r(t,\tau))^3}d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3, \quad t\in\sigma, \tag{5.28}$$

где σ− гладкая поверхность, описываемая функцией $t_3=f(t_1,t_2)$. Здесь $t=(t_1,t_2,t_3)$, $\tau=(\tau_1,\tau_2,\tau_3)$, $r(t,\tau)=((t_1-\tau_1)^2+(t_2-\tau_2)^2+(t_3-\tau_3)^2)^{1/2}$.

Для построения кубатурной формулы интеграл (5.28) преобразуется к интегралу вида

$$\frac{1}{4\pi}\int\int\limits_D \frac{g(v_1,v_2)}{r^3(v,w)}\frac{\sqrt{1+(f'_{v_1}(v_1,v_2))^2+(f'_{v_2}(v_1,v_2))^2}}{\left(1+\left(\frac{f(v_1,v_2)-f(w_1,w_2)}{r(v,w)}\right)^2\right)^{3/2}}dv_1 dv_2,$$

где $r(v,w)=((v_1-w_1)^2+(v_2-w_2)^2)^{1/2}$, $v=(v_1,v_2)$, $w=(w_1,w_2)$, а затем для последнего строятся кубатурные формулы метода дискретных вихрей.

В работе I.V. Boykov, A.I. Boykova, E.S. Ventsel [77] предложены методы приближенного вычисления интегралов

$$\int\int\limits_{E_2} \frac{\varphi(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2}{\gamma(\tau_1,\tau_2)},$$

где $\gamma(\tau_1,\tau_2)$− кривая, описываемая уравнением $\gamma(\tau_1,\tau_2)=0$.

Глава 2

ГЛАДКОСТЬ ГИПЕРСИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

В этой главе исследуется гладкость функций, определенных гиперсингулярными интегралами с переменными особенностями различных видов. Полученные результаты будут использованы в главе 6 при построении наилучших методов аппроксимации сопряженных функций.

1. Гладкость сопряженных функций одной переменной

Прежде всего исследуем гладкость сопряженных функций, определяемых гиперсингулярными интегралами

$$\tilde{\varphi}(t) = J_1\varphi \equiv \int\limits_{-1}^{1} \frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau - t)^p}, \quad p = 2, 3, \ldots -1 < t < 1, \tag{1.1}$$

$$\tilde{\varphi}(t) = I_1\varphi \equiv \int\limits_{-1}^{1} \frac{\varphi(\tau)d\tau}{|\tau - t|^{p+\lambda}}, \quad p = 1, 2, 3, \cdots, 0 < \lambda < 1, -1 \le t \le 1, \tag{1.2}$$

где $\varphi(t) \in W^r H_\alpha$ или $\varphi(t) \in \hat{W}_q^r(M)$, $r = p+1, p+2, \ldots$, $q = 0, 1, \ldots, r$.

Вначале остановимся на случае, когда $\varphi(t) \in W^r H_\alpha$.

Теорема 1.1. Пусть $\varphi(\tau) \in W^r H_\alpha(1)$, $r \ge p-1$, $0 < \alpha \le 1$, $\Omega = [-1, 1]$. Тогда $\tilde{\varphi}(t) \in L_{0,r-p+1,p-1}(\Omega, M)$.

Доказательство. Интегрируя по частям интеграл $J_1\varphi$, имеем:

$$\tilde{\varphi}(t) = -\frac{\varphi(1)}{(p-1)}\frac{1}{(1-t)^{p-1}} + \frac{\varphi(-1)(-1)^{p-1}}{(p-1)(1+t)^{p-1}} -$$

$$-\frac{\varphi'(1)}{(p-1)(p-2)}\frac{1}{(1-t)^{p-2}} + \frac{\varphi'(-1)(-1)^{p-2}}{(p-1)(p-2)(1+t)^{p-2}} -$$

$$- \cdots -$$

$$-\frac{\varphi^{(p-2)}(1)}{(p-1)!}\frac{1}{(1-t)} + \frac{\varphi^{(p-2)}(-1)(-1)}{(p-1)!(1+t)} + \frac{1}{(p-1)!}\int\limits_{-1}^{1} \frac{\varphi^{(p-1)}(\tau)}{\tau - t}d\tau. \tag{1.3}$$

Исследуем гладкость интеграла

$$\psi_1(t) = \int\limits_{-1}^{1} \frac{\varphi^{(p-1)}(\tau)d\tau}{\tau - t}.$$

Из теоремы Привалова [39] следует, что функция $\psi_1(t)$ удовлетворяет условию Гельдера H_α при $-1 < t < 1$. Из очевидного равенства

$$\psi_1(t) = \varphi^{(p-1)}(t) \ln \left|\frac{1-t}{1+t}\right| + \int\limits_{-1}^{1} \frac{\varphi^{(p-1)}(\tau) - \varphi^{(p-1)}(t)}{\tau - t} d\tau,$$

и, учитывая, что функция $(1+t)^{p-1}(1-t)^{p-1} \ln \left|\frac{1-t}{1+t}\right|$ ограничена при $p \geq 2$ и при всех $t \in [-1, 1]$, убеждаемся, что функция $\tilde{\varphi}(t)$ имеет особенность вида $(1-t)^{-(p-1)} \pm (1+t)^{-(p-1)}$.

Из формулы (1.3) следует, что функция $\tilde{\varphi}(t)$ допускает дифференцирование до $(r-p+1)$-го порядка во внутренних точках области Ω.

Из этих соображений вытекает справедливость теоремы.

Замечание. Из приведенной теоремы следует, что на данном классе функций невозможно построить равномерное приближение к функции $\tilde{\varphi}(t)$ на сегменте $[-1, 1]$.

Теорема 1.2. Пусть $\varphi(t) \in \hat{W}_q^r H_\alpha(1), 0 < \alpha < 1$, $r \geq p-1$, $0 \leq q \leq$ $\leq p-2$. Тогда $\tilde{\varphi}(t) \in L_{0,r-p+1,p-2-q}(\Omega, M)$.

Доказательство теоремы 1.2 подобно доказательству предыдущей теоремы.

Теорема 1.3. Пусть $\varphi(t) \in \hat{W}_q^r H_\alpha(1)$, $r \geq p-1$, $p-2 < q \leq r$. Тогда $\tilde{\varphi}(t) \in \bar{Q}_{q+1-p,r-q}(\Omega, M)$ при $p-1 \leq q \leq r-2$; $\tilde{\varphi}(t) \in W^{r-p} H_\alpha(M)$ при $q = r-1$ и $0 < \alpha < 1$.

Доказательство. Пусть $\varphi(t) \in \hat{W}_q^r H_\alpha(1)$ и $p-1 \leq q \leq r-2$.

Воспользовавшись определением гиперсингулярного интеграла и интегрируя по частям, имеем:

$$\tilde{\varphi}(t) = -\frac{1}{(p-1)!} \int\limits_{-1}^{1} \frac{\varphi^{(p-1)}(\tau) d\tau}{\tau - t}.$$

Продолжим этот процесс. В результате

$$\tilde{\varphi}(t) = \frac{1}{(p-1)!} \int\limits_{-1}^{1} \varphi^{(p)}(\tau) \ln|\tau - t| d\tau =$$

$$= \frac{1}{(p-1)!} \int\limits_{-1}^{1} \varphi^{(q)}(\tau) f_{q-p}(\tau - t) d\tau = \frac{1}{(p-1)!} \left\{ \varphi^{(q)}(1) f_{q+1-p}(1-t) - \right.$$

$$\left. -\varphi^{(q)}(-1) f_{q+1-p}(-1-t) + \cdots + \int\limits_{-1}^{1} \varphi^{(r)}(\tau) f_{r-p}(\tau - t) d\tau \right\}. \qquad (1.4)$$

Здесь $f_{s-p}(\tau-t)$– результат $(s-p)$-кратного последовательного интегрирования функции $\ln|\tau-t|$.

Из формулы (1.4) следует, что функция $\tilde{\varphi}(t)$ допускает дифференцирование до $(r-p+1)$-го порядка, причем производные до $(q-p)$-го порядка ограничены по модулю константой M, а для $(q+1-p)$-й производной справедлива оценка

$$|\tilde{\varphi}^{(q+1-p)}(x)| \leq M|(1+\ln d(x,\Gamma)|),$$

где $d(x,\Gamma)$– расстояние от точки x до концов Γ сегмента $[-1,1]$.

Первое утверждение теоремы доказано.

Осталось рассмотреть случай, когда $q=r-1$. В этом случае

$$\tilde{\varphi}(x)=\frac{1}{(p-1)!}\int\limits_{-1}^{1}\varphi^{(r)}(\tau)f_{r-p}(\tau-t)d\tau. \qquad (1.5)$$

Равенство (1.5) можно дифференцировать $r-p$ раз. В результате имеем

$$\tilde{\varphi}^{(r-p)}(x)=\frac{1}{(p-1)!}\int\limits_{-1}^{1}\varphi^{(r)}(\tau)\ln|\tau-t|d\tau=$$

$$=\frac{1}{(p-1)!}\int\limits_{-1-t}^{1-t}\varphi^{(r)}(\tau+t)\ln|\tau|d\tau. \qquad (1.6)$$

Из формулы (1.6) следует, что $\tilde{\varphi}^{(r-p)}(x)\in H_\alpha(M)$.

Второе утверждение теоремы доказано.

Теорема доказана.

Утверждения, аналогичные приведенным в теоремах 1.1 – 1.3, справедливы и для интегралов вида $I_1\varphi$. Для краткости приведем только аналог теоремы 1.3.

Теорема 1.4. Пусть $\Omega=[-1,1]$, $\varphi(t)\in\hat{W}_q^r(1)$, $r\geq p$, $p-1\leq q\leq r$. Тогда $\tilde{\varphi}(t)\in Q_{0,r-p-1+\lambda}(\Omega,M)$ при $q=p-1$; $\tilde{\varphi}(t)\in Q_{q+1-p,r-q-2+\lambda}(\Omega,M)$, при $p\leq q<r$ и $\tilde{\varphi}(t)\in W^{r-p}(M)$ при $q=r$.

Доказательство. Пусть $\varphi(t)\in\hat{W}_q^r(1)$, $r\geq p$, $p-1\leq q\leq r$. Воспользовавшись определением гиперсингулярного интеграла, имеем:

$$\tilde{\varphi}(t)=-\frac{1}{p!}\int\limits_{-1}^{1}\frac{\varphi^{(p)}(\tau)d\tau}{|\tau-t|^\lambda}. \qquad (1.7)$$

Рассмотрим несколько возникших возможностей. Предположим вначале, что $q = p - 1$. Тогда представим предыдущее равенство в виде

$$\tilde{\varphi}(t) = -\frac{1}{p!}\int\limits_{-1-t}^{1-t} \frac{\varphi^{(p)}(v+t)dv}{|v|^{\lambda}}. \tag{1.8}$$

Из этого равенства следует, что функция $\tilde{\varphi}(t)$ имеет производные до $(r-p)$-го порядка, причем для производной порядка $1 \le j \le r-p$, справедливо неравенство

$$\left|\frac{d^j\tilde{\varphi}(t)}{dt^j}\right| \le M/(d(t,\Gamma))^{j-1+\lambda}, \tag{1.9}$$

где $\Gamma = \{\pm 1\}-$ концы сегмента $[-1,1]$.

Следовательно, при $q = p-1$ $\tilde{\varphi}(t) \in Q_{0,r-p-1+\lambda}(\Omega, M)$.

Рассмотрим теперь случай, когда $q > p-1$. Из равенства (1.8) следует, что функция $\tilde{\varphi}(t)$ имеет производные до $(q+1-p)$-го порядка, ограниченные по модулю общей константой M и производные $(q+1-p+j)$-го порядка, удовлетворяющие неравенству $\left|\frac{d^v\tilde{\varphi}(t)}{dt^v}\right| \le M/(d(t,\Gamma))^{j-1+\lambda}$, где $v = q+1-p+j$, $j = 1,2,\ldots,r-q-1$.

Следовательно, $\tilde{\varphi}(t) \in Q_{q+1-p,r-q-2+\lambda}(\Omega, M)$. Аналогичные рассуждения показывают, что при $q = r$ $\tilde{\varphi}(t) \in W^{r-p}(M)$.

Теорема доказана.

2. Гладкость сопряженных функций, представимых многомерными гиперсингулярными интегралами

Пусть $\Omega = [-1,1]^2$. Рассмотрим интеграл

$$\tilde{\varphi}(t_1,t_2) = (H\varphi)(t_1,t_2) = \iint\limits_{\Omega} \frac{\varphi(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2}{((\tau_1-t_1)^2+(\tau_2-t_2)^2)^{p/2}} \tag{2.1}$$

в предположении, что функция $\varphi(\tau_1,\tau_2) \in C_2^r(1)$, а переменная $t = (t_1,t_2)$ пробегает область $\Omega\backslash\Gamma$, где $\Gamma = \partial\Omega-$ граница области Ω.

Отметим, что если гиперсингулярный интеграл $H\varphi$ понимать в смысле определения 1.16 из главы 1, то гладкость функции $\tilde{\varphi}(t_1,t_2) = (H\varphi)(t_1,t_2)$ можно исследовать во всей области E_2. Отметим, что все полученные результаты легко переносятся на случай гиперсингулярных интегралов любой конечной размерности.

.

Доказательство. Возьмем произвольную точку $E \in \Omega \setminus \partial\Omega$ и оценим модуль функции $\tilde{\varphi}(t)$, $t = (t_1, t_2)$. Соединим точку E отрезками прямых с вершинами квадрата Ω и будем рассматривать треугольники AEB, BEC, CED, DEA. (рис. 2.1). При этом достаточно ограничиться рассмотрением треугольника CED.

Введем полярную систему координат с центром в точке E. Тогда гиперсингулярный интеграл в части, относящейся к треугольнику DEC, равен

$$H_1\varphi = \lim_{\rho_1 \to 0} \int\limits_{\Theta_1}^{\Theta_2} \int\limits_{\rho_1}^{\frac{a}{\sin\Theta}} \frac{\varphi(t_1 + \rho\cos\Theta, t_2 + \rho\sin\Theta) d\rho d\Theta}{\rho^{p-1}}, \qquad (2.2)$$

где $a-$ расстояние от точки E до прямой DC.

Зафиксируем произвольное достаточно малое ρ_1 и вычислим по частям интеграл

$$\int\limits_{\rho_1}^{\frac{a}{\sin\Theta}} \frac{\varphi(t_1+\rho\cos\Theta, t_2+\rho\sin\Theta)d\rho d\Theta}{\rho^{p-1}}.$$

В результате получаем выражение

$$\frac{f_{p-2}(\Theta)}{a^{p-2}}+\frac{f_{p-3}(\Theta)}{a^{p-3}}+\cdots+\frac{f_1(\Theta)}{a}+$$

$$+\frac{g_{p-2}(\Theta)}{\rho_1^{p-2}}+\frac{g_{p-3}(\Theta)}{\rho_1^{p-3}}+\cdots+\frac{g_1(\Theta)}{\rho_1}+f_0(\Theta),$$

где $f_i(\Theta)$, $g_i(\Theta)$, $i=0,1,\dots,p-2-$ непрерывные функции.

После интегрирования последнего выражения по Θ получаем

$$\frac{A_{p-2}}{a^{p-2}}+\cdots+\frac{A_1}{a}+\frac{B_{p-2}}{\rho_1^{p-2}}+\cdots+\frac{B_1}{\rho_1}+C_1.$$

Аналогичные выражения получаем и при интегрировании по остальным треугольникам. Таким образом, интеграл $H\varphi$ оценивается неравенством

$$|H\varphi(t)|\le\frac{M}{(\rho(t,\Gamma))^{p-2}}, \tag{2.3}$$

где $\rho(t,\Gamma)-$ расстояние от точки t до границы $\Gamma=\partial\Omega$ области Ω.

Докажем законность дифференцирования по параметрам t_1 и t_2 во внутренних точках (t_1,t_2) области в гиперсингулярных интегралах вида $\tilde{\varphi}(t_1,t_2)=(H\varphi)(t_1,t_2)$.

Пусть $(t_1,t_2)-$ внутренняя точка области Ω и расстояние от нее до границы $\Gamma=\partial\Omega$ области Ω равно $d(d>0)$. Возьмем h $(0<h<d)$ и рассмотрим разность

$$(H\varphi)(t_1+h,t_2)-(H\varphi)(t_1,t_2)=$$

$$=\int\limits_{\Omega}\!\!\int\frac{\varphi(\tau_1,\tau_2)d\tau_1d\tau_2}{((\tau_1-(t_1+h))^2+(\tau_2-t_2)^2)^{p/2}}-\int\limits_{\Omega}\!\!\int\frac{\varphi(\tau_1,\tau_2)d\tau_1d\tau_2}{((\tau_1-t_1)^2+(\tau_2-t_2)^2)^{p/2}}=$$

$$=\int\limits_{\Omega_1}\!\!\int\frac{\varphi(\tau_1+h,\tau_2)d\tau_1d\tau_2}{((\tau_1-t_1)^2+(\tau_2-t_2)^2)^{p/2}}-\int\limits_{\Omega}\!\!\int\frac{\varphi(\tau_1,\tau_2)d\tau_1d\tau_2}{((\tau_1-t_1)^2+(\tau_2-t_2)^2)^{p/2}}=$$

$$= \iint\limits_{\Omega^*} \frac{(\varphi(\tau_1+h,\tau_2)-\varphi(\tau_1,\tau_2))d\tau_1 d\tau_2}{((\tau_1-t_1)^2+(\tau_2-t_2)^2)^{p/2}}+$$

$$+\int\limits_{-1-h}^{-1}\int\limits_{-1}^{1} \frac{\varphi(\tau_1+h,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2}{((\tau_1-t_1)^2+(\tau_2-t_2)^2)^{p/2}}-$$

$$-\int\limits_{1-h}^{1}\int\limits_{-1}^{1} \frac{\varphi(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2}{((\tau_1-t_1)^2+(\tau_2-t_2)^2)^{p/2}},$$

где $\Omega_1 = [1-h, -1-h; -1, 1]$, $\Omega^* = [1-h, 1; -1, 1]$.

Воспользовавшись определением производной, имеем:

$$\frac{\partial (H\varphi)(t_1,t_2)}{\partial t_1} = \lim_{h\to 0}\left[\frac{1}{h}\iint\limits_{\Omega^*} \frac{(\varphi(\tau_1+h,\tau_2)-\varphi(\tau_1,\tau_2))d\tau_1 d\tau_2}{((\tau_1-t_1)^2+(\tau_2-t_2)^2)^{p/2}}+\right.$$

$$+\frac{1}{h}\int\limits_{-1-h}^{-1}\int\limits_{-1}^{1} \frac{\varphi(\tau_1+h,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2}{((\tau_1-t_1)^2+(\tau_2-t_2)^2)^{p/2}}-$$

$$\left.-\frac{1}{h}\int\limits_{1-h}^{1}\int\limits_{-1}^{1} \frac{\varphi(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2}{((\tau_1-t_1)^2+(\tau_2-t_2)^2)^{p/2}}\right]=$$

$$= \iint\limits_{\Omega^*} \frac{\partial \varphi(\tau_1,\tau_2)}{\partial \tau_1}\frac{d\tau_1 d\tau_2}{((\tau_1-t_1)^2+(\tau_2-t_2)^2)^{p/2}}-$$

$$-\int\limits_{-1}^{1} \frac{\varphi(1,\tau_2)d\tau_2}{((1-t_1)^2+(\tau_2-t_2)^2)^{p/2}}+\int\limits_{-1}^{1} \frac{\varphi(-1,\tau_2)d\tau_2}{((1+t_1)^2+(\tau_2-t_2)^2)^{p/2}}.$$

Из этой формулы следует законность почленного дифференцирования интеграла $(H\varphi)(t_1,t_2)$ во внутренних точках области Ω.

Покажем теперь, что функция $\tilde{\varphi}(t_1,t_2)$ дифференцируема $r-2$ раза.

Последовательно дифференцируя, имеем:

$$\frac{\partial \tilde{\varphi}(t_1,t_2)}{\partial t_1} = \iint\limits_{\Omega} \varphi(\tau_1,\tau_2)\frac{\partial}{\partial t_1}\frac{1}{((\tau_1-t_1)^2+(\tau_2-t_2)^2)^{p/2}}d\tau_1 d\tau_2 =$$

$$= -\iint\limits_{\Omega} \varphi(\tau_1,\tau_2)\frac{\partial}{\partial \tau_1}\frac{1}{((\tau_1-t_1)^2+(\tau_2-t_2)^2)^{p/2}}d\tau_1 d\tau_2 =$$

$$= -\int\limits_{-1}^{1} \frac{\varphi(1,\tau_2)}{((1-t_1)^2+(\tau_2-t_2)^2)^{p/2}}d\tau_2+\int\limits_{-1}^{1} \frac{\varphi(-1,\tau_2)}{((1+t_1)^2+(\tau_2-t_2)^2)^{p/2}}d\tau_2+$$

$$+\iint\limits_{\Omega}\frac{\partial\varphi(\tau_1,\tau_2)}{\partial\tau_1}\frac{d\tau_1 d\tau_2}{((\tau_1-t_1)^2+(\tau_2-t_2)^2)^{p/2}}.$$

Продолжая этот процесс, имеем:

$$\frac{\partial^v\tilde{\varphi}(t_1,t_2)}{\partial t_1^v}=-\int\limits_{-1}^{1}\varphi(1,\tau_2)\frac{\partial^{v-1}}{\partial t_1^{v-1}}\frac{1}{((1-t_1)^2+(\tau_2-t_2)^2)^{p/2}}d\tau_2-$$

$$-\int\limits_{-1}^{1}\frac{\partial\varphi(1,\tau_2)}{\partial t_1}\frac{\partial^{v-2}}{\partial t_1^{v-2}}\frac{1}{((1-t_1)^2+(\tau_2-t_1)^2)^{p/2}}d\tau_2-\cdots-$$

$$-\int\limits_{-1}^{1}\frac{\partial^{v-1}\varphi(1,\tau_2)}{\partial t_1^{v-1}}\frac{1}{((1-t_1)^2+(\tau_2-t_2)^2)^{p/2}}d\tau_2+$$

$$+\int\limits_{-1}^{1}\varphi(-1,\tau_2)\frac{\partial^{v-1}}{\partial t_1^{v-1}}\frac{1}{((1+t_1)^2+(\tau_2-t_2)^2)^{p/2}}d\tau_2+$$

$$+\int\limits_{-1}^{1}\frac{\partial\varphi(-1,\tau_2)}{\partial t_1}\frac{\partial^{v-2}}{\partial t_1^{v-2}}\frac{1}{((1+t_1)^2+(\tau_2-t_2)^2)^{p/2}}d\tau_2+\cdots+$$

$$+\int\limits_{-1}^{1}\frac{\partial^{v-1}\varphi(-1,\tau_2)}{\partial t_1^{v-1}}\frac{1}{((1+t_1)^2+(\tau_2-t_2)^2)^{p/2}}d\tau_2+$$

$$+\iint\limits_{\Omega}\frac{\partial^v\varphi(\tau_1,\tau_2)}{\partial\tau_1^v}\frac{d\tau_1 d\tau_2}{((\tau_1-t_1)^2+(\tau_2-t_2)^2)^{p/2}}. \qquad (2.4)$$

Исследуем условия гладкости функции $\varphi_v(\tau_1,\tau_2)=\frac{\partial^v\varphi(\tau_1,\tau_2)}{\partial\tau_1^v}$, достаточные для существования последнего интеграла.

Для этого обозначим через $B(t,R)$ круг с центром в точке t и с радиусом R, где $R-$ расстояние от точки t до границы области Ω. Очевидно, что из существования интеграла

$$\iint\limits_{B(t,R)}\frac{\varphi_v(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2}{((\tau_1-t_1)^2+(\tau_2-t_2)^2)^{p/2}}$$

следует существование интеграла

$$\iint\limits_{\Omega}\frac{\varphi_v(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2}{((\tau_1-t_1)^2+(\tau_2-t_2)^2)^{p/2}}.$$

Перейдя к полярной системе координат, имеем:

$$\int\limits_{B(t,R)}\int \frac{\varphi_v(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2}{((\tau_1-t_1)^2+(\tau_2-t_2)^2)^{p/2}} = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^R \frac{\varphi_v^*(\rho,\Theta)d\rho d\Theta}{\rho^{p-1}}.$$

Интегрируя по частям интеграл

$$\int\limits_0^R \frac{\varphi_v^*(\rho,\Theta)d\rho}{\rho^{p-1}}$$

и воспользовавшись определением гиперсингулярного интеграла, приходим к выражению, включающему интеграл

$$\int\limits_0^R \frac{\partial^{p-1}\varphi_v^*(\rho,\Theta)}{\partial\rho^{p-1}}|\ln\rho|d\rho.$$

Для того чтобы этот интеграл существовал, достаточно, чтобы функция $\frac{\partial^{p-1}\varphi_v^*(\rho,\Theta)}{\partial\rho^{p-1}}$ удовлетворяла условию Дини – Липшица.

Следовательно, если функция $\varphi\in C_2^r(M)$ и не введены дополнительные условия на гладкость производных r-го порядка, то для существования последнего интеграла следует предположить, что функция φ_v^* имеет p-ю производную. Поэтому параметры r, p и v связаны соотношением $r=p+v$, из которого вытекает, что функцию $\tilde\varphi(t_1,t_2)$ можно дифференцировать по переменной t_1 $r-p$ раз.

Очевидно, такое же заключение можно сделать и для дифференцирования по переменной t_2 и при вычислении смешанных производных.

Резюмируя предыдущие выкладки, можно сделать вывод, что функции $\tilde\varphi(t_1,t_2)$, представимые интегралом (2.1), удовлетворяют неравенству (2.3) и имеют производные до $(r-p)$-го порядка, причем как модуль самой функции, так и модули всех производных стремятся к бесконечности при стремлении точки (t_1,t_2) к границе области.

Теорема доказана.

Замечание. Из теоремы 2.1 следует, что если $\varphi\in C_{2,q}^r(1)$, $r\geq p+1$, $p=2,3,\dots,r-1$, то $|\tilde\varphi(t)|\leq\frac{A}{(d(x,\Gamma))^{p-q-2}}$ при $p>q+2$; $|\tilde\varphi(t)|\leq A(1+$ $+|\ln d(x,\Gamma)|)$ при $p=q+2$; $|\tilde\varphi(t)|\leq A$ при $p<q+2$.

Из доказательства теоремы легко заметить, что если производные r-го порядка удовлетворяют условию Дини – Липшица, то предыдущее утверждение можно усилить.

Теорема 2.2. Пусть $\varphi \in C_2^r(\Omega, M)$ и производные $\partial^r \varphi(t_1,t_2)/\partial t_1^{r_1} \partial t_2^{r_2}$, $r_1 + r_2 = r$, $r_i \geq 0$, $i = 1, 2$, удовлетворяют условиям Дини – Липшица. Тогда $\tilde{\varphi}(t_1,t_2) \in L_{0,r-p+1,p-2}(\Omega, M)$.

Теорема 2.3. Пусть $\varphi \in C_{2,q}^r(1)$, $r \geq p+1$, $q = 0, 1, \ldots, r-1$. Тогда справедливы оценки:

$$\left\| \frac{\partial^{|v|} \tilde{\varphi}(t_1,t_2)}{\partial t_1^{v_1} \partial t_2^{v_2}} \right\|_{C[\Omega]} \leq B$$

при $0 \leq |v| \leq q+1$, $p - q + |v| \leq 2$;

$$\left| \frac{\partial^{|v|} \tilde{\varphi}(t_1,t_2)}{\partial t_1^{v_1} \partial t_2^{v_2}} \right| \leq B(1 + |\ln d(t, \Gamma)|), \quad t \in \Omega \backslash \partial\Omega,$$

при $0 \leq |v| \leq q+1$, $p - q + |v| = 3$;

$$\left| \frac{\partial^{|v|} \tilde{\varphi}(t_1,t_2)}{\partial t_1^{v_1} \partial t_2^{v_2}} \right| \leq B \frac{1}{(d(t,\Gamma))^{p-q+|v|-3}}, \quad t \in \Omega \backslash \partial\Omega,$$

при $0 \leq |v| \leq q+1$, $p - q + |v| \geq 4$;

$$\left| \frac{\partial^{|v|} \tilde{\varphi}(t_1,t_2)}{\partial t_1^{v_1} \partial t_2^{v_2}} \right| \leq B \frac{1}{(d(t,\Gamma))^{p-q+|v|-2}}, \quad t \in \Omega \backslash \partial\Omega,$$

при $q + 2 \leq |v| \leq r - p + 1$.

Доказательство. Прежде всего оценим абсолютную величину $|\tilde{\varphi}(t_1,t_2)|$. Для этого, так же как и при доказательстве теоремы 2.1, представим интеграл (2.1) в виде суммы четырех интегралов по треугольникам AEB, BEC, CED, DEA (рис. 2.1). Для определенности ограничимся интегралом $H_1\varphi$, представленным в виде (2.2).

Проинтегрируем по частям интеграл $H_1\varphi$ и перейдем затем к пределу при $\rho_1 \to 0:$

$$\int\limits_{\rho_1}^{\frac{a}{\sin\Theta}} \frac{\varphi(t_1 + \rho\cos\Theta, t_2 + \rho\sin\Theta)d\rho}{\rho^{p-1}} =$$

$$= -\frac{\varphi(t_1 + \rho\cos\Theta, t_2 + \rho\sin\Theta)}{(p-2)\rho^{p-2}} \Bigg|_{\rho_1}^{\frac{a}{\sin\Theta}} +$$

$$+ \int\limits_{\rho_1}^{\frac{a}{\sin\Theta}} \frac{\partial\varphi(t_1 + \rho\cos\Theta, t_2 + \rho\sin\Theta)}{\partial\rho} \frac{d\rho}{(p-2)\rho^{p-2}} =$$

$$= -\frac{\varphi(t_1 + \frac{a}{\sin\Theta}\cos\Theta, t_2 + \frac{a}{\sin\Theta})}{(p-2)(\frac{a}{\sin\Theta})^{p-2}} + \frac{\varphi(t_1 + \rho_1\cos\Theta_1, t_2 + \rho_1\sin\Theta)}{(p-2)\rho_1^{p-2}} +$$

$$+\frac{1}{p-2}\int\limits_{\rho_1}^{\frac{a}{\sin\Theta}} \frac{\partial\varphi(t_1 + \rho\cos\Theta, t_2 + \rho\sin\Theta)}{\partial\rho}\frac{d\rho}{\rho^{p-2}} =$$

$$= \frac{1}{p-2}\int\limits_{\rho_1}^{\frac{a}{\sin\Theta}} \frac{\partial\varphi(t_1 + \rho\cos\Theta, t_2 + \rho\sin\Theta)}{\partial\rho}d\rho.$$

Здесь были использованы определение интеграла Адамара и условие обратимости функции φ в нуль на границе области.

Так как

$$\frac{\partial\varphi(t_1 + \rho\cos\Theta, t_2 + \rho\sin\Theta)}{\partial\rho} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\cos\Theta + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\sin\Theta,$$

эта производная и последующие производные до q-го порядка включительно обращаются в нуль на отрезке DC.

Таким образом,

$$H_1\varphi = \lim_{\rho_1\to 0}\int\limits_{\Theta_1}^{\Theta_2}\int\limits_{\rho_1}^{\frac{a}{\sin\Theta}} A\frac{\partial^{q+1}\varphi(t_1 + \rho\cos\Theta, t_2 + \rho\sin\Theta)}{\partial\rho^{q+1}}\frac{d\rho}{\rho^{p-q-2}}.$$

Здесь $A-$ постоянная, не влияющая на дальнейшие рассуждения.

Из последнего выражения можно сделать три вывода:

1) абсолютная величина функции $H\varphi$ при $p \geq q+4$ оценивается неравенством

$$|\tilde{\varphi}(t_1, t_2)| = |(H\varphi)(t)| \leq B\frac{1}{(d(t,\Gamma))^{p-q-3}};$$

2) при $p = q+3$ абсолютная величина функции $\tilde{\varphi}(t)$ оценивается неравенством

$$|\tilde{\varphi}(t)| = |(H\varphi)(t)| \leq B(1 + |\ln(d(t,\Gamma)|);$$

3) при $p \leq q+2$ функция $\tilde{\varphi}(t)$ ограничена по модулю:

$$|\tilde{\varphi}(t)| = |(H\varphi)(t)| \leq B.$$

Возьмем производную по t_1 от интеграла (2.1). Воспользовавшись определением интеграла Адамара, имеем:

$$\frac{\partial\tilde{\varphi}(t_1, t_2)}{\partial t_1} = \int\int\limits_{\Omega} \varphi(\tau_1, \tau_2)\frac{\partial}{\partial t_1}\left(\frac{1}{((\tau_1 - t_1)^2 + (\tau_2 - t_2)^2)^{p/2}}\right)d\tau_1 d\tau_2 =$$

.

Здесь $A_1 = (t_1 - \eta, t_2 - \eta)$, $B_1 = (t_1 + \eta, t_2 - \eta)$, $C_1 = (t_1 + \eta, t_2 + \eta)$, $D_1 = (t_1 - \eta, t_2 + \eta)$.

Рассмотрим в отдельности каждый из интегралов в правой части равенства (2.5). Нетрудно видеть, что

$$\int\limits_{\Delta_1}\!\!\int \varphi(\tau_1, \tau_2) \frac{\partial}{\partial \tau_1} \left(\frac{1}{((\tau_1 - t_1)^2 + (\tau_2 - t_2)^2)^{p/2}} \right) d\tau_1 d\tau_2 =$$

$$= \int\limits_{-1}^{t_2-\eta} d\tau_2 \int\limits_{-1}^{1} \varphi(\tau_1,\tau_2)\frac{\partial}{\partial \tau_1}\left(\frac{1}{((\tau_1-t_1)^2+(\tau_2-t_2)^2)^{p/2}}\right) d\tau_1 d\tau_2 =$$

$$= -\int\int\limits_{\Delta_1} \frac{\partial(\tau_1,\tau_2)}{\partial \tau_1}\frac{1}{((\tau_1-t_1)^2+(\tau_2-t_2)^2)^{p/2}} d\tau_1 d\tau_2.$$

Аналогичным образом вычисляются интегралы по областям Δ_2, Δ_3, Δ_4.

Таким образом,

$$\frac{\partial \tilde{\varphi}(t_1,t_2)}{\partial t_1} = \int\int\limits_{\Omega} \frac{\partial \varphi(\tau_1,\tau_2)}{\partial \tau_1}\frac{d\tau_1 d\tau_2}{((\tau_1-t_1)^2+(\tau_2-t_2)^2)^{p/2}}.$$

Продолжая этот процесс и вычисляя производные до $(q+1)$-го порядка, имеем:

$$\frac{\partial^{q+1} \tilde{\varphi}(t_1,t_2)}{\partial t_1^{q_1}\partial t_2^{q_2}} = \int\int\limits_{\Omega} \frac{\partial^{q+1} \varphi(\tau_1,\tau_2)}{\partial \tau_1^{q_1}\partial \tau_2^{q_2}}\frac{d\tau_1 d\tau_2}{((\tau_1-t_1)^2+(\tau_2-t_2)^2)^{p/2}}, \tag{2.6}$$

где $q+1 = q_1+q_2$.

Из формулы (2.6) следует, что при $|v| \le q+1$

$$\frac{\partial^{|v|} \tilde{\varphi}(t_1,t_2)}{\partial t_1^{q_1}\partial t_2^{q_2}} = \int\int\limits_{\Omega} \frac{\partial^{|v|} \varphi(\tau_1,\tau_2)}{\partial \tau_1^{v_1}\partial \tau_2^{v_2}}\frac{d\tau_1 d\tau_2}{((\tau_1-t_1)^2+(\tau_2-t_2)^2)^{p/2}}. \tag{2.7}$$

Для оценки производных порядка $|v|$ при $|v| > q+1$, воспользуемся представлением (2.6), в котором, для простоты дальнейших обозначений, будем рассматривать производные только по одной переменной. Тогда из формулы (2.4) следует, что

$$\frac{\partial^{v} \tilde{\varphi}(t_1,t_2)}{\partial t_1^{v}} =$$

$$= -\int\limits_{-1}^{1} \frac{\partial^{v-q-2}}{\partial \tau_1^{v-q-2}}\left(\frac{1}{((1-t_1)^2+(\tau_2-t_2)^2)^{p/2}}\right)\left.\frac{\partial^{q+1}\varphi(t_1,\tau_2)}{\partial t_1^{q+1}}\right|_{t_1=1} d\tau_2 - \cdots -$$

$$-\int\limits_{-1}^{1} \frac{1}{((1-t_1)^2+(\tau_2-t_2)^2)^{p/2}}\left.\frac{\partial^{v-1}\varphi(t_1,\tau_2)}{\partial t_1^{v-1}}\right|_{t_1=1} d\tau_2 +$$

$$+\int_{-1}^{1}\frac{\partial^{v-q-2}}{\partial t_1^{v-q-2}}\left(\frac{1}{((1+t_1)^2+(\tau_2-t_2)^2)^{p/2}}\right)\frac{\partial^{q+1}\varphi(t_1,\tau_2)}{\partial t_1^{q+1}}\bigg|_{t_1=-1}d\tau_2+\cdots+$$

$$+\int_{-1}^{1}\frac{1}{((1+t_1)^2+(\tau_2-t_2)^2)^{p/2}}\frac{\partial^{v-1}\varphi(t_1,\tau_2)}{\partial t_1^{v-1}}\bigg|_{t_1=-1}d\tau_2+$$

$$+\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{\partial^{v}\varphi(\tau_1,\tau_2)}{\partial\tau_1^{v}}\frac{d\tau_1 d\tau_2}{((\tau_1-t_1)^2+(\tau_2-t_2)^2)^{p/2}}. \tag{2.8}$$

Для существования последнего интеграла в равенстве (2.8) достаточно выполнения условия $r-v\geq p-1$.

Отсюда следует, что возможно вычисление производных до $r-(p-1)$.

Оценим абсолютную величину функции $\frac{\partial^{|v|}\tilde{\varphi}(t_1,t_2)}{\partial t_1^{v_1}\partial t_2^{v_2}}$ при $q+1<|v|\leq$ $\leq r-(p-1)$. Из формулы (2.8) следует, что

$$\left|\frac{\partial^{|v|}\tilde{\varphi}(t_1,t_2)}{\partial t_1^{v_1}\partial t_2^{v_2}}\right|\leq B\frac{1}{(d(t,\Gamma))^{p+|v|-q-2}},$$

при $q+2\leq|v|\leq r-p+1$.

Интеграл, стоящий в правой части формулы (2.8), можно, как и интеграл $H\varphi$, представить в виде суммы четырех интегралов. Повторяя рассуждения, приведенные при исследовании интеграла $H\varphi$, можно показать, что при $|v|\leq q+1$ и $p-q+|v|\geq 4$

$$\left|\frac{\partial^{|v|}\tilde{\varphi}(t_1,t_2)}{\partial t_1^{v_1}\partial t_2^{v_2}}\right|\leq\frac{1}{(d(t,\Gamma))^{p-q+|v|-3}};$$

при $|v|\leq q+1$ и $p-q+|v|=3$

$$\left|\frac{\partial^{|v|}\tilde{\varphi}(t_1,t_2)}{\partial t_1^{v_1}\partial t_2^{v_2}}\right|\leq B(1+\ln d(t,\Gamma)|);$$

при $|v|\leq q+1$ и $p-q+|v|\leq 2$

$$\left|\frac{\partial^{|v|}\tilde{\varphi}(t_1,t_2)}{\partial t_1^{v_1}\partial t_2^{v_2}}\right|\leq B;$$

при $q+2\leq|v|\leq r-p+1$

$$\left|\frac{\partial^{|v|}\tilde{\varphi}(t_1,t_2)}{\partial t_1^{v_1}\partial t_2^{v_2}}\right|\leq B\frac{1}{(d(t,\Gamma))^{p-q+|v|-2}}.$$

Теорема доказана.

Глава 3

ОПТИМАЛЬНЫЕ КВАДРАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ИНТЕГРАЛОВ АДАМАРА

В данной главе излагаются оптимальные методы вычисления одномерных гиперсингулярных интегралов с фиксированной и переменной сингулярностями. Отдельные результаты, включенные в эту главу, были ранее опубликованы в монографии И. В. Бойкова, Н. Ф. Добрыниной, Л. Н. Домнина [24] и в статьях [75] – [78]. Многие результаты публикуются впервые.

1. Интегралы с фиксированной сингулярностью, определенные на сегменте

Рассмотрим гиперсингулярные интегралы

$$I\varphi = \int\limits_{-1}^{1} \frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{\tau^{\nu}}, \quad \nu = 2, 3, \ldots;$$

$$F\varphi = \int\limits_{-1}^{1} \frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{|\tau|^{\nu+\alpha}}, \quad \nu = 2, 3, \ldots,\ 0 < \alpha < 1.$$

Для вычисления интегралов $I\varphi$ и $F\varphi$ используются квадратурные формулы следующего вида:

$$I\varphi = \sum_{k=-N}^{N} \sum_{l=0}^{\rho} p_{kl}\varphi^{(l)}(t_k) + R_N(p_{kl}, t_k, \varphi); \tag{1.1}$$

$$F\varphi = \sum_{k=-N}^{N} \sum_{l=0}^{\rho} p_{kl}\varphi^{(l)}(t_k) + R_N(p_{kl}, t_k, \varphi). \tag{1.2}$$

Интегралы $I\varphi$ и $F\varphi$ вычисляются на классах функций $W^r(1)$ и $W_p^r(1)$, $r \geq \nu$, $1 \leq p < \infty$.

Ниже в асимптотически оптимальных квадратурных формулах используется локальный сплайн, построенный в [10]. Напомним его построение.

Пусть $f(t) \in W^r(1)$ и $t \in [-1;1]$. На сегменте $[-1;1]$ функция $f(t)$ аппроксимируется полиномом

$$\tilde{f}(t) = \sum_{k=0}^{r-1} \left(\frac{f^{(k)}(0)}{k!} t^k + B_k \delta^{(k)}(1) \right),$$

где

$$\delta(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{r-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} t^k.$$

Коэффициенты B_k определяются из равенства

$$(1-t)^r - \sum_{k=0}^{r-1} \frac{B_k r!}{(r-k-1)!} (1-t)^{(r-k-1)} = (-1)^r R_{rq}(t),$$

где $R_{rq}(t)$ – полином степени r, наименее уклоняющийся от нуля в метрике пространства L_q $(1/p + 1/q = 1)$, $1 \le p \le \infty$.

Построим теперь локальный сплайн, аппроксимирующий функцию $f(t) \in W^r(1)$ на сегменте $[-1;1]$. Разобьем сегмент $[-1;1]$ точками t_k: $-1 = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = 1$ на более мелкие сегменты $\Delta_k = [t_k; t_{k+1}]$, $k = 0, 1, \ldots, N-1$. На каждом сегменте Δ_k функция $f(t)$ аппроксимируется полиномом

$$f[\Delta_k, t] = \sum_{l=0}^{r-1} \left(\frac{f^{(l)}(t_k)}{l!} (t - t_k)^l + B_{kl} \delta^{(l)}(t_{k+1}) \right),$$

где

$$\delta(t) = f(t) - \sum_{l=0}^{r-1} \frac{f^{(l)}(t_k)}{l!} (t - t_k)^l.$$

Коэффициенты B_{kl} определяются из равенства

$$(t_{k+1} - t)^r - \sum_{l=0}^{r-1} \frac{B_{kl} r! (t_{k+1} - t_k)}{(r-l-1)!} (t_{k+1} - t)^{r-l-1} =$$

$$= (-1)^r R_{rq} \left(\frac{t_k + t_{k+1}}{2}, \frac{t_{k+1} - t_k}{2}, t \right),$$

где через $R_{rq}(s, h, t)$ обозначен полином вида $t^r + \sum_{l=0}^{r-1} \alpha_l t^l$, определенный на сегменте $\Delta = [s-h, s+h]$ и наименее уклоняющийся от нуля в метрике пространства $L_q(\Delta)$ $(1/p + 1/q = 1)$.

Локальный сплайн, составленный из полиномов $f(\Delta_k, t)$, $k = 0, 1, \ldots,$ $N-1$, обозначается через $f_N(t)$.

Теорема 1.1. Среди всевозможных квадратурных формул вида (1.2), использующих $2N(\rho+1)$, $\rho = r-1$ значений подынтегральной функции для вычисления интеграла $I\varphi$, асимптотически оптимальной на классе $W^r(1)$ является формула

$$I\varphi = \sum_{k=0}^{r-1} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!(k+1-\nu)} t_1^{k+1-\nu}\left(1-(-1)^{k+1-\nu}\right)+$$

$$+\sum_{k=-N}^{N-1}{}' \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{\varphi\left([t_k,t_{k+1}],\tau\right)}{\tau^\nu}\,d\tau + R_N(\varphi), \tag{1.3}$$

где $t_k = \pm(k/N)^{(r+1)/(r+1-\nu)}$, $k=0,1,\ldots,N$, $\sum'$ означает суммирование по $k \neq -1,0$; $\varphi([t_k,t_{k+1}],\tau)$ – описанный выше полином.

Погрешность квадратурной формулы (1.3) равна

$$R_N\left[W^r(1)\right] = \frac{2+o(1)}{4^r r!}\left(\frac{r+1}{r+1-\nu}\right)^{r+1}\frac{1}{N^r}.$$

Теорема 1.2. Пусть интеграл $I\varphi$ вычисляется по квадратурной формуле вида (1.1) при $\rho = r-1$ $(r=1,2,\ldots)$. Тогда при $1 \le p < \infty$

$$\zeta_N\left[W_p^r(1)\right] \ge \frac{(1+o(1))\,R_{rq}(1)}{2^{r-1/q} r!(rq+1)^{1/q}}\left(\frac{r+1/q}{r-\nu+1/q}\right)^{r+1/q}\frac{1}{N^r}.$$

Теорема 1.3. Пусть интеграл $I\varphi$ вычисляется по квадратурной формуле вида (1.1) при $\rho = r-2$ $(r=2,4,6,\cdots)$. Тогда при $1 \le p < \infty$

$$\zeta_N\left[W_p^r(1)\right] \ge \frac{(1+o(1))\,R_{rq}(1)}{2^{r-1/q} r!(rq+1)^{1/q}}\left(\frac{r+1/q}{r-\nu+1/q}\right)^{r+1/q}\frac{1}{N^r}.$$

Теорема 1.4. Среди всевозможных квадратурных формул вида (1.1), использующих $2N(\rho+1)$, $\rho = r-1$ значений подынтегральной функции для вычисления интеграла $I\varphi$, асимптотически оптимальной на классе $W_p^r(1)$, $r=1,2,\ldots$, $1 \le p < \infty$ является формула (1.3), в которой $t_k = \pm(k/N)^{(r+1/q)/(r+1/q-\nu)}$. Погрешность этой формулы равна

$$R_N[W_p^r(1)] = \frac{(1+o(1))\,R_{rq}(1)}{2^{r-1/q}(rq+1)^{1/q} r!}\left(\frac{r+1/q}{r+1/q-\nu}\right)^{r+1/q}\frac{1}{N^r}.$$

Теорема 1.5. Среди квадратурных формул вида (1.2) асимптотически оптимальной на классе $W^r(1)$ является формула

$$F\varphi = \sum_{k=0}^{r-1}\frac{2\varphi^k(0)}{k!(k+1-\nu-\lambda)} t_1^{k+1-\nu-\lambda}+$$

$$+\sum_{k=-N}^{N-1}{}' \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{\varphi\left([t_k, t_{k+1}], \tau\right)}{|\tau|^{\nu+\lambda}}\, d\tau + R_N(\varphi), \qquad (1.4)$$

в которой $t_k = (k/N)^{(r+1)/(r+1-\nu-\lambda)}$, а $\sum'$ означает суммирование по $k \neq -1, 0$. Погрешность этой формулы равна

$$R_N\left[W^r(1)\right] = (2 + o(1)) \left(\frac{r+1}{r+1-\nu-\lambda}\right)^{r+1} \frac{1}{4^r N^r r!}.$$

Теорема 1.6. Пусть интеграл $F\varphi$ вычисляется по квадратурной формуле вида (1.2) при $\rho = r - 1$ $(r = 1, 2, \ldots)$. Тогда при $1 \le p < \infty$

$$\zeta_N\left[W_p^r(1)\right] \ge \frac{(1+o(1))\, R_{rq}(1)}{2^{r-1/q} r! (rq+1)^{1/q} N^r} \left(\frac{r+1/q}{r+1/q-\nu-\lambda}\right)^{r+1/q}.$$

Теорема 1.7. Пусть интеграл $F\varphi$ вычисляется по квадратурной формуле (1.2) при $\rho = r - 2$ $(r = 2, 4, \ldots)$. Тогда при $1 \le p < \infty$

$$\zeta_N\left[W_p^r(1)\right] \ge \frac{(1+o(1))\, R_{rq}(1)}{2^{r-1/q} r! (rq+1)^{1/q} N^r} \left(\frac{r+1/q}{r+1/q-\nu-\lambda}\right)^{r+1/q}.$$

Теорема 1.8. Среди всевозможных квадратурных формул вида (1.2) при $\rho = r - 1$ $(r = 1, 2, \ldots)$, использующих $2N(\rho+1)$ значений подынтегральной функции для вычисления интеграла $F\varphi$, асимптотически оптимальной на классе $W^r(1)$ является формула (1.4), в которой $t_{\pm k} = \pm(k/N)^{(r+1/q)/(r+1/q-\nu-\lambda)}$. Погрешность этой формулы равна

$$R_N\left[W_p^r(1)\right] = \frac{(1+o(1))\, R_{rq}(1)}{2^{r-1/q} (rq+1)^{1/q} r! N^r} \left(\frac{r+1/q}{r+1/q-\nu-\lambda}\right)^{r+1/q}.$$

Доказательство теоремы 1.1. Найдем верхнюю грань оценки снизу погрешности квадратурных формул вида (1.1) на классе $W^r(1)$. Введем следующие обозначения: $s_0 = 0$,

$$s_{\pm k} = \pm(k/N)^{(r+1)/(r+1-\nu)}, \quad k = 1, \ldots, N;\ M = [\ln N],\ l = [N/M];$$

N_k (N_k^*) – число узлов квадратурной формулы (1.1) в сегменте

$$\Delta_k = \left[s_{kM}, s_{(k+1M]}\right],\ (\nabla_k = \left[s_{-(k+1)M}, s_{-kM}\right]),\ k = 0, 1, \ldots, l,$$

где $s_{(l+1)M} = 1$, $s_{-(l+1)M} = -1$. Кроме того, введем обозначения:

$$\varphi^+(t) = \frac{\varphi(t) + |\varphi(t)|}{2}, \quad \varphi^-(t) = \frac{\varphi(t) - |\varphi(t)|}{2}.$$

При вычислении оценки снизу можно ограничиться сегментом $[0,1]$. На этом сегменте построим функцию $\varphi^*(t)$, равную нулю ри $t \in [0, s_M]$, принадлежащую классу $W^r(1)$ и обращающуюся в нуль вместе с производными до $(r-1)$-го порядка включительно в узлах t_k $(k = 1, 2, \ldots, N)$ квадратурной формулы (1.1) и в точках s_{kM} $(k = 1, 2, \ldots, l+1)$. Кроме того, потребуем, чтобы $\int\limits_{s_{kM}}^{s_{(k+1)M}} \varphi^*(\tau)\,d\tau \geq 0, \quad k = 0, 1, \ldots, l.$

Очевидно, что

$$\int\limits_0^1 \frac{\varphi^*(\tau)\,d\tau}{\tau^\nu} =$$

$$= \sum_{k=1}^{l} \Bigg[\frac{1}{s^\nu_{(k+1)M}} \int\limits_{s_{kM}}^{s_{(k+1)M}} \varphi^*(\tau)\,d\tau + \left(\frac{1}{s^\nu_{kM}} - \frac{1}{s^\nu_{(k+1)M}} \right) \int\limits_{s_{kM}}^{s_{(k+1)M}} \varphi^*(\tau)\,d\tau \Bigg] =$$

$$= I_1 + I_2. \tag{1.5}$$

В монографии С. М. Никольского [65] показано, что при любом расположении узлов t_k

$$\inf_{p_{kl}} \sup_{\varphi \in W^r(1)} \left| \int\limits_0^1 \varphi(\tau)\,d\tau - \sum_{k=1}^{N} \sum_{l=0}^{r-1} p_{kl} \varphi^{(l)}(t_k) \right| \geq \frac{1}{r!\left[4(N-1) + 2(r-1)^{1/r}\right]^r}.$$

Из этого неравенства, леммы С. А. Смоляка и теоремы С. М. Никольского [65], имеем

$$\sup_{\varphi \in W^r(1), \varphi^{(j)}(v_i) = 0, v_i \in [s_{kM}, s_{(k+1)M}], i = 1, 2, \ldots, N_k, j = 0, 1, \ldots, r-1} \int\limits_{s_{kM}}^{s_{(k+1)M}} \varphi(\tau)\,d\tau \geq$$

$$\geq \frac{\left(s_{(k+1)M} - s_{kM}\right)^{r+1}}{r!\left[4(N-1) + 2(r-1)^{1/r}\right]^r}.$$

Замечание. Лемма С. А. Смоляка приведена на с. 42 первой части книги.

Оценим сумму I_1

$$I_1 = \sum_{k=1}^{l} \frac{1}{s^\nu_{(k+1)M}} \int\limits_{s_{kM}}^{s_{(k+1)M}} \varphi(\tau) d\tau \geq \sum_{k=1}^{l} \frac{1}{s^\nu_{(k+1)M}} \frac{\left(s_{(k+1)M} - s_{kM}\right)^{r+1}}{r![4(N_k - 1) + 2(r+1)^{1/r}]^r} \geq$$

$$\geq \left(\frac{M}{N}\right)^{r+1} \left(\frac{r+1}{r+1-\nu}\right)^{r+1} \frac{(1 + o(1))}{r!} \sum_{k=M}^{l} \frac{1}{\left[4(N_k - 1) + 2(r+1)^{1/r}\right]^r}.$$

Можно показать, что сумма

$$\sum_{k=M}^{l} \frac{1}{\left[4(N_k-1)+2(r+1)^{1/r}\right]^r}$$

при выполнении условия $N_M+N_{M+1}+\ldots+N_l=N$ достигает минимума при $N_M=N_{M+1}=\ldots=N_l=N/(l-M+1)$. Подставляя это значение в предыдущее неравенство, имеем:

$$I_1 \geq \frac{1+o(1)}{4^r r!}\left(\frac{r+1}{r+1-\nu}\right)^{r+1}\frac{1}{N^r}.$$

Перейдем к оценке I_2

$$I_2=\sum_{k=1}^{l}\left(\frac{1}{s_{kM}^{\nu}}-\frac{1}{s_{(k+1)M}^{\nu}}\right)\int\limits_{s_{kM}}^{s_{(k+1)M}}\varphi^{*-}(\tau)\,d\tau \geq$$

$$\geq \frac{1+o(1)}{N^{r+1}}M^{r+2}\frac{l}{(r+1)!}\left(\frac{r+1}{r+1-\nu}\right)^{r+2}=o(N^{-r}).$$

Таким образом, из оценок I_1 и I_2 следует, что

$$\sup_{\varphi\in W^r(1)}\int\limits_{-1}^{1}\frac{\varphi^*(\tau)\,d\tau}{\tau^\nu}\geq 2\int\limits_{0}^{1}\frac{\varphi^*(\tau)\,d\tau}{\tau^\nu}\geq\frac{2+o(1)}{4^r r!}\left(\frac{r+1}{r+1-\nu}\right)^{r+1}\frac{1}{N^r}.$$

Оценка снизу получена.

Погрешность квадратурной формулы (1.3) равна

$$|R_N(\varphi)|\leq\left|\int\limits_{t_{-1}}^{t_1}\frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{\tau^\nu}-\sum_{k=0}^{r-1}\frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!(k+1-\nu)}t_1^{k+1-\nu}\left(1-(-1)^{k+1-\nu}\right)\right|+$$

$$+2\sum_{k=1}^{N-1}\left|\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}}\frac{\varphi(\tau)-\varphi\left([t_k,t_{k+1}],\tau\right)}{\tau^\nu}\,d\tau\right|=I_3+I_4.$$

Оценим каждое слагаемое в отдельности:

$$I_3=\left|\int\limits_{t_{-1}}^{t_1}\frac{\varphi(\tau)-\varphi(0)-\varphi'(0)\tau-\ldots-\varphi^{(r-1)}(0)\tau^{r-1}/(r-1)!}{\tau^\nu}\,d\tau\right|\leq$$

$$\leq\frac{2}{(r-1)!}\int\limits_{0}^{t_1}\frac{\int_0^\tau(\tau-t)^{r-1}\varphi^{(r)}(t)\,dt}{\tau^\nu}\,d\tau\leq\frac{2}{r!(r-\nu+1)}\cdot\frac{1}{N^{r+1}};$$

$$I_4 = 2\sum_{k=1}^{N-1}\left|\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{\varphi(\tau)-\varphi\left([t_k,t_{k+1}],\tau\right)}{\tau^{\nu}}\,d\tau\right| =$$

$$= 2\sum_{k=1}^{N-1}\left|\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{1}{\tau^{v}} \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} (U(t,\tau))\varphi^{(r)}(t)\,dt\,d\tau\right| =$$

$$= 2\sum_{k=1}^{N-1}\left|\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \varphi^{(r)}(t)\Big[\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{1}{\tau^{v}}\,(U(t,\tau))d\tau\Big]dt\right|, \qquad (1.6)$$

где

$$U(t,\tau) = \frac{K_r(\tau-t)}{(r-1)!} - \sum_{j=0}^{r-1}\frac{B_{kj}K_{r-j}(t_{k+1}-t)}{(r-1-j)!},$$

$$K_r(t) = \begin{cases} t^{r-1}, & \text{если} \quad t \geq 0, \\ 0, & \text{если} \quad t < 0. \end{cases}$$

Зафиксировав произвольное значение t, имеем три возможности:

1) $\dfrac{K_r(\tau-t)}{(r-1)!} \geq \sum\limits_{j=0}^{r-1}\dfrac{B_{kj}}{(r-1-j)!}K_{r-j}(t_{k+1}-t);$

2) $\dfrac{K_r(\tau-t)}{(r-1)!} \leq \sum\limits_{j=0}^{r-1}\dfrac{B_{kj}}{(r-1-j)!}K_{r-j}(t_{k+1}-t);$

3) при $t_k \leq \tau \leq t^*$ выполняется второе неравенство, а при $t^* \leq \tau \leq$ $\leq t_{k+1}$ – первое.

Нетрудно видеть, что в случаях 1) и 2)

$$I_5 = \left|\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \tau^{-\nu}\left(\frac{K_r(\tau-t)}{(r-1)!} - \sum_{j=0}^{r-1}\frac{B_{kj}}{(r-1-j)!}K_{r-j}(t_{k+1}-t)\right)d\tau\,\right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{t_k^{\nu}}\left|\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \left(\frac{K_r(\tau-t)}{(r-1)!} - \sum_{j=0}^{r-1}\frac{B_{kj}}{(r-1-j)!}K_{r-j}(t_{k+1}-t)\right)d\tau\right|. \qquad (1.7)$$

В случае 3) нужно рассмотреть две возможности:

а) внутренний интеграл в формуле (1.6) не меньше нуля;

б) внутренний интеграл в формуле (1.6) меньше нуля.

В случае а) справедливо, как легко видеть, неравенство (1.7):

$$I_5 = \left| \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \tau^{-\nu} \left(\frac{K_r(\tau - t)}{(r-1)!} - \sum_{j=0}^{r-1} \frac{B_{kj}}{(r-1-j)!} K_{r-j}(t_{k+1} - t) \right) d\tau \right| =$$

$$= \int\limits_{t_k}^{t^*} \tau^{-\nu} \left(\frac{K_r(\tau - t)}{(r-1)!} - \sum_{j=0}^{r-1} \frac{B_{kj}}{(r-1-j)!} K_{r-j}(t_{k+1} - t) \right) d\tau +$$

$$+ \int\limits_{t^*}^{t_{k+1}} \tau^{-\nu} \left(\frac{K_r(\tau - t)}{(r-1)!} - \sum_{j=0}^{r-1} \frac{B_{kj}}{(r-1-j)!} K_{r-j}(t_{k+1} - t) \right) d\tau \leq$$

$$\leq \frac{1}{t^{*\nu}} \int\limits_{t_k}^{t^*} \left(\frac{K_r(\tau - t)}{(r-1)!} - \sum_{j=0}^{r-1} \frac{B_{kj}}{(r-1-j)!} K_{r-j}(t_{k+1} - t) \right) d\tau +$$

$$+ \frac{1}{t^{*\nu}} \int\limits_{t^*}^{t_{k+1}} \left(\frac{K_r(\tau - t)}{(r-1)!} - \sum_{j=0}^{r-1} \frac{B_{kj}}{(r-1-j)!} K_{r-j}(t_{k+1} - t) \right) d\tau =$$

$$= \frac{1}{t^{*\nu}} \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \left(\frac{K_r(\tau - t)}{(r-1)!} - \sum_{j=0}^{r-1} \frac{B_{kj}}{(r-1-j)!} K_{r-j}(t_{k+1} - t) \right) d\tau \leq$$

$$\leq \frac{1}{t_k^{\nu}} \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \left(\frac{K_r(\tau - t)}{(r-1)!} - \sum_{j=0}^{r-1} \frac{B_{kj}}{(r-1-j)!} K_{r-j}(t_{k+1} - t) \right) d\tau.$$

В случае второй возможности

$$I_5 \leq \frac{1}{t_k^{\nu}} \left| \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \psi^-(t, \tau)\, d\tau \right| - \frac{1}{t_{k+1}^{\nu}} \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \psi^+(t, \tau)\, d\tau =$$

$$= \frac{1}{t_k^{\nu}} \left| \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \psi(t, \tau) d\tau \right| + \left(\frac{1}{t_k^{\nu}} - \frac{1}{t_{k+1}^{\nu}} \right) \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \psi^+(t, \tau)\, d\tau \leq$$

$$\leq \frac{1}{t_k^{\nu}} \left| \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \psi(t, \tau)\, d\tau \right| + \frac{t_{k+1}^{\nu} - t_k^{\nu}}{t_k^{\nu} t_{k+1}^{\nu}} \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{(\tau - t)^{r-1}}{(r-1)!}\, d\tau,$$

где

$$\psi^+(t, \tau) = \begin{cases} \psi(t, \tau), & \psi(t, \tau) \geq 0, \\ 0, & \psi(t, \tau) < 0; \end{cases}$$

$$\psi^-(t, \tau) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad \psi(t, \tau) \geq 0, \\ \psi(t, \tau), & \text{если} \quad \psi(t, \tau) < 0; \end{cases}$$

$$\psi(t,\tau) = \frac{K_r(\tau - t)}{(r-1)!} - \sum_{j=0}^{r-1} \frac{B_{kj}}{(r-1-j)!} K_{r-j}(t_{k+1} - t).$$

Продолжая начатые выкладки, имеем:

$$I_4 \le 2\left|\sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{t_k^\nu} \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \left(\frac{(t_{k+1}-t)^r}{r!} - \sum_{j=0}^{r-1} \frac{B_{kj}(t_{k+1}-t_k)}{(r-1-j)!}(t_{k+1}-t)^{r-j-1} \right) dt \right| +$$

$$+A\frac{\ln N}{N^{r+1}} \le \frac{2}{r!} \sum_{k=1}^{N-1} \frac{2\left((t_{k+1}-t_k)/2\right)^{r+1} R_{rq}(1)}{(r+1)t_k^\nu} + A\frac{\ln N}{N^{r+1}} =$$

$$= \frac{R_{rq}(1)}{(r+1)!2^{r-1}} \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{t_k^\nu}(t_{k+1}-t_k)^{r+1} + A\frac{\ln N}{N^{r+1}} =$$

$$= \frac{R_{rq}(1)\,(1+o(1))}{2^{r-1}(r+1)!N^r} \left(\frac{r+1}{r+1-\nu} \right)^{r+1}.$$

Известно [65], что $R_{r1}(1) = (r+1)/2^r$. Подставляя это значение в предыдущее неравенство, имеем:

$$I_4 \le \frac{2+o(1)}{4^r r! N^r} \left(\frac{r+1}{r+1-\nu} \right)^{r+1}.$$

Собирая полученные оценки погрешности квадратурной формулы и сравнивая их с величиной функционала $\zeta_N\left[W^r(1)\right]$, завершаем доказательство теоремы 1.1.

Доказательство теоремы 1.2 подобно доказательству теоремы 1.1. Поэтому ниже лишь отмечаются места, в которых доказательства имеют некоторые различия.

Введем следующие обозначения: $M = [\ln N]$, $l = [N/M]$, $s_0 = 0$,

$$s_{\pm k} = \pm \left(\frac{kM}{N} \right)^{(r+1/q)/(r-\nu+1/q)}, \ k = 1, \dots, l+1, \ s_{-l-1} = -1, \ s_{l+1} = 1.$$

Пусть $\varphi^*(t)$ – функция, обращающаяся в нуль вместе со всеми своими производными до $(r-1)$-го порядка включительно в узлах t_k квадратурной формулы (1.1), в точках $s_{\pm k}$ $(k = 1, 2, \dots, l+1)$ и, кроме того, равная нулю на сегменте $[s_{-1}, s_1]$. Из теорем I' и D1 монографии [85] (см. также раздел 1.4 первой части книги) следует, что

$$\sup_{\varphi\in W_p^r(M_k;[s_k,s_{k+1}]),\varphi^{(i)}(t_j)=0,i=1,2,\ldots,N_k,i=0,1,\ldots,r-1}\left|\int\limits_{s_k}^{s_{k+1}}\varphi(\tau)\,d\tau\right|\geq$$

$$\geq\frac{(s_{k+1}-s_k)^{r+1-1/p}M_kR_{rq}(1)}{2^r r!(rq+1)^{1/q}\left(N_k-1+[R_{rq}(1)]^{1/r}\right)^r},$$

где N_k – число узлов квадратурной формулы (1.1), расположенных в сегменте $[s_k,s_{k+1}]$.

Как и при доказательстве теоремы 1.1, имеем

$$\int\limits_0^1\frac{\varphi^*(\tau)\,d\tau}{\tau^\nu}\geq\sum_{k=1}^{l}\left[\frac{1}{s_{k+1}^\nu}\int\limits_{s_k}^{s_{k+1}}\varphi^*(\tau)\,d\tau+\left(\frac{1}{s_k^\nu}-\frac{1}{s_{k+1}^\nu}\right)\int\limits_{s_k}^{s_{k+1}}\varphi^{*-}(\tau)\,d\tau\right]=I_1+I_2.$$

Нетрудно видеть, что

$$I_1=\sum_{k=1}^{l}\frac{1}{s_{k+1}^\nu}\int\limits_{s_k}^{s_{k+1}}\varphi^*(\tau)\,d\tau\geq\frac{R_{rq}(1)}{2^r r!(rq+1)^{1/q}}\sum_{k=1}^{l}\frac{M_k(s_{k+1}-s_k)^{r+1-1/p}}{s_{k+1}^\nu\left(N_k-1+[R_{rq}(1)]^{1/r}\right)^r}.$$

Величины M_k можно выбирать произвольно при выполнении только одного условия: $\sum\limits_{k=-l,k\neq0}^{l}M_k^p=1$. Положив $M_k=1/(2l)^{1/p}$, имеем:

$$I_1\geq\frac{R_{rq}(1)}{2^r r!(rq+1)^{1/q}(2l)^{1/p}}\sum_{k=1}^{l}\frac{(s_{k+1}-s_k)^{r+1-1/p}}{s_{k+1}^\nu\left(N_k-1+[R_{rq}(1)]^{1/r}\right)^r}\geq$$

$$\geq\frac{(1+o(1))\,R_{rq}(1)}{2^r r!(rq+1)^{1/q}2^{1/p}l^{1/p}}\left(\frac{M(r+1/q)}{N(r-\nu+1/q)}\right)^{r+1/q}\sum_{k=1}^{l}\frac{1}{(N_k-1+[R_{rq}(1)]^{1/r})^r}=$$

$$=\frac{(1+o(1))R_{rq}(1)}{2^{r+1/p}r!(rq+1)^{1/q}}\left(\frac{r+1/q}{r-\nu+1/q}\right)^{r+1/q}\frac{1}{N^r}.$$

Перейдем к оценке I_2

$$|I_2|=\sum_{k=1}^{l}\left|\frac{s_{k+1}^\nu-s_k^\nu}{s_k^\nu s_{k+1}^\nu}\int\limits_{s_k}^{s_{k+1}}\varphi^{*-}(\tau)\,d\tau\right|\leq$$

$$\leq\sum_{k=1}^{l}\left|\frac{s_{k+1}^\nu-s_k^\nu}{s_k^\nu s_{k+1}^\nu}\right|\left|\int\limits_{s_k}^{s_{k+1}}\frac{1}{(r-1)!}\int\limits_{s_k}^{\tau}(\tau-t)^{r-1}\varphi^{*(r)}(t)\,dt\,d\tau\right|=o(N^{-r}).$$

Из оценок I_1 и I_2 следует справедливость теоремы 1.2.

Доказательство теоремы 1.3 аналогично доказательству предыдущей теоремы и поэтому опускается.

Доказательство теоремы 1.4. Погрешность квадратурной формулы (1.3) оценивается неравенством

$$|R_N(\varphi)| \le |\int\limits_{t_{-1}}^{t_1} \frac{\varphi(\tau)}{\tau^\nu}\,d\tau - \sum_{k=0}^{r-1} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!(k+1-\nu)} t_1^{k+1-r}\left(1-(-1)^{k+1-\nu}\right)|+$$

$$+|\sum_{k=-N}^{N-1}{}' \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{\varphi(\tau)-\varphi\left([k_k, t_{k+1}],\tau\right)}{\tau^\nu}\,d\tau| = I_1 + I_2,$$

где $\sum'$ означает суммирование по $k \neq -1, 0$.

Как и при доказательстве теоремы 1.1

$$I_1 = \frac{2}{(r-1)!}|\int\limits_0^{t_1} \frac{\int\limits_0^{\tau}(\tau-t)^{r-1}\varphi^{(r)}(t)\,dt}{\tau^\nu}\,d\tau| = O(N^{-r-1/q}).$$

Переходя к оценке суммы I_2, предварительно оценим интеграл

$$I_3 = |\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{\varphi(\tau)-\varphi\left([t_k, t_{k+1}],\tau\right)}{\tau^\nu}\,d\tau| =$$

$$= |\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{1}{\tau^\nu}\left[\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}}\left(\frac{K_r(\tau-t)}{(r-1)!} - \sum_{j=0}^{r-1}\frac{B_{kj}}{(r-1-j)!}K_{r-j}(t_{k+1}-t)\right)\varphi^{(r)}(t)dt\right]d\tau| =$$

$$= |\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \varphi^{(r)}(t)\left[\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}}\left(\frac{K_r(\tau-t)}{(r-1)!} - \sum_{j=0}^{r-1}\frac{B_{kj}}{(r-1-j)!}K_{r-j}(t_{k+1}-t)\right)\frac{1}{\tau^\nu}d\tau\right]dt|.$$

Здесь, как и при доказательстве теоремы 1.1, нужно рассмотреть три случая.

Проведя выкладки, аналогичные выкладкам, приведенным при доказательстве теоремы 1.2, имеем

$$I_3 \le \frac{1}{t_k^\nu}|\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \varphi^{(r)}(t)\Big(\frac{(t_{k+1}-t)^r}{r!} - \sum_{j=0}^{r-1}\frac{B_{kj}(t_{k+1}-t_k)r!}{(r-1-j)!}(t_{k+1}-t)^{r-j-1}\Big)dt|+$$

$$+\frac{t_{k+1}^\nu - t_k^\nu}{t_k^\nu t_{k+1}^\nu}\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} |\varphi^{(r)}(t)|\,dt \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{(\tau-t_k)^{r-1}}{(r-1)!}\,d\tau \le$$

$$\leq \frac{1}{t_k^\nu}|\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} |\varphi^{(r)}(t)| \left(\frac{(t_{k+1}-t_k)^r}{r!} - \sum_{j=0}^{r-1} \frac{B_{kj}(t_{k+1}-t_k)r!}{(r-1-j)!}(t_{k+1}-t)^{r-j-1}\right) dt|+$$

$$+O(\frac{1}{N^{r+1/q}})[\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} |\varphi^{(r)}(t)|^p\, dt]^{1/p}.$$

Подставляя полученную оценку в сумму I_2, имеем:

$$I_2 \leq \sum_{k=-N}^{N-1}{}' \frac{1}{t_k^\nu} \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} |\varphi^{(r)}(t)|| \frac{(t_{k+1}-t)^r}{r!} - \sum_{j=0}^{r-1} \frac{B_{kj}(t_{k+1}-t_k)r!}{(r-1-j)!}(t_{k+1}-t)^{r-j-1}|dt+$$

$$+O(N^{-r-1/q}) \sum_{k=-N}^{N-1} \frac{1}{k} [\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} |\varphi^{(r)}(t)|^p\, dt]^{1/p} \leq$$

$$\leq \sum_{k=-N}^{N-1}{}' \frac{1}{t_k^\nu} \|\varphi^{(r)}\|_{L_p[t_k,t_{k+1}]} [\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} | \frac{(t_{k+1}-t)^r}{r!} -$$

$$- \sum_{j=0}^{r-1} \frac{B_{kj}(t_{k+1}-t_k)r!}{(r-j-1)!}(t_{k+1}-t)^{r-j-1}\Big|^q dt]^{1/q} + o(N^{-r}) \leq$$

$$\leq \frac{(1+o(1))\, R_{rq}(1)}{2^r(rq+1)^{1/q}r!} \left(\frac{r+1/q}{(r+1/q-\nu)N}\right)^{r+1/q} \sum_{k=-N}^{N-1} \|\varphi^{(r)}\|_{L_p[t_k,t_{k+1}]} + o(\frac{1}{N^r}) \leq$$

$$\leq \frac{(1+o(1))\, R_{rq}(1)}{2^{r-1/q}(rq+1)^{1/q}r!} \left(\frac{r+1/q}{r+1/q-\nu}\right)^{r+1/q} \frac{1}{N^r}.$$

Из оценок I_1, I_2 и сопоставления с утверждением теоремы 1.2 следует справедливость теоремы 1.4.

Доказательство теоремы 1.5 подобно доказательству теоремы 1.1. Найдем вначале верхнюю грань оценки снизу погрешности квадратурной формулы (1.2) на классе $W_\infty^r(1)$.

Так как класс $W^r(1)$ вложен в класс $W_\infty^r(1)$, то для этого достаточно вычислить верхнюю грань оценки снизу погрешности квадратурной формулы (1.2) на классе $W^r(1)$. Повторим рассуждения, сделанные при доказательстве теоремы 1.1, полагая $s_0 = 0$, $s_{\pm k} = \pm(k/N)^{(r+1)/(r+1-\nu-\lambda)}$, $k = 1, 2, \ldots, N$. Имеем

$$I_1 = \sum_{k=1}^{l} \frac{1}{s_{(k+1)M}^{\nu+\lambda}} \int\limits_{s_{kM}}^{s_{(k+1)M}} \varphi(\tau)\, d\tau \geq$$

$$\geq \sum_{k=1}^{l} \frac{1}{\left[4(N_k-1)+2(r+1)^{1/r}\right]^r r!} \frac{(s_{(k+1)M}-s_{kM})^{r+1}}{s_{(k+1)M}^{\nu+\lambda}} =$$

$$= \frac{1+o(1)}{r! 4^r N^r} \left(\frac{r+1}{r+1-\nu-\lambda}\right)^{r+1}.$$

Завершается доказательство по аналогии с завершением доказательства теоремы 1.1.

Доказательство теоремы 1.6 подобно доказательству теоремы 1.2. Основное отличие состоит в том, что в качестве узлов s_k берутся значения $s_0 = 0$, $s_{\pm k} = \pm(k/N)^{(r+1/q)/(r+1/q-\nu-\lambda)}$, $k = 1, 2, \ldots, N$.

Как и при доказательстве теоремы 1.2, имеем

$$\int_0^1 \frac{\varphi^*(\tau)\,d\tau}{\tau^{\nu+\lambda}} \geq \sum_{k=1}^{l} \left[\frac{1}{s_{(k+1)M}^{\nu+\lambda}} \int_{s_{kM}}^{s_{(k+1)M}} \varphi^*(\tau)\,d\tau + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{1}{s_{kM}^{\nu+\lambda}} - \frac{1}{s_{(k+1)M}^{\nu+\lambda}} \right) \int_{s_{kM}}^{s_{(k+1)M}} \varphi^{*-}(\tau)\,d\tau \right] = I_1 + I_2.$$

Ограничимся рассмотрением выражения I_1 :

$$I_1 \geq \frac{R_{rq}(1)}{2^r r!(rq+1)^{1/q}} \sum_{k=1}^{l} \frac{M_k}{s^{\nu+\lambda}} \frac{(s_{(k+1)M}-s_{kM})^{r+1-1/p}}{\left[N_k - 1 + [R_{rq}(1)]^{1/r}\right]^r} =$$

$$= \frac{R_{rq}(1)}{2^r r!(rq+1)^{1/q}(2l)^{(1/p)}} \sum_{k=1}^{l} \frac{(s_{(k+1)M}-s_{kM})^{r+1-1/p}}{s_{(k+1)M}^{\nu+\lambda}\left[N_k - 1 + [R_{rq}(1)]^{1/r}\right]^r} \geq$$

$$\geq \frac{(1+o(1))\,R_{rq}(1)}{2^r r!(rq+1)^{1/q} N^r} \left(\frac{r+1/q}{r+1/q-\nu-\lambda}\right)^{r+1/q}.$$

Завершается доказательство этой теоремы так же, как и доказательство теоремы 1.2.

Доказательство теоремы 1.7 проводится по аналогии с доказательством предыдущей теоремы.

Доказательство теоремы 1.8 подобно доказательству теоремы 1.5.

В теоремах 1.1, 1.4 построены асимптотически оптимальные квадратурные формулы для вычисления гиперсингулярных интегралов $I\varphi$ и $F\varphi$. Однако эти квадратурные формулы достаточно сложны для реализации и требуется построение более удобных для програмирования квадратурных формул, являющихся одновременно асимптотически оптимальными или оптимальными по порядку.

Рассмотрим интеграл $I\varphi$. Предварительно построим локальный сплайн $\varphi_N(t)$, аппроксимирующий функцию $\varphi(t) \in W^r(1)$ на сегменте $[-1,1]$. Введем узлы $t_k = (k/N)^{(r+1)/(r+1-v)}$, $t_k^* = -(k/N)^{(r+1)/(r+1-v)}$, $k = 0, 1, \ldots, N$.

Сегмент $[-1,1]$ покроем более мелкими сегментами $\Delta_k = [t_k, t_{k+1}]$, $\Delta_k^* = [t_{k+1}^*, t_k^*]$, $k = 1, \ldots, N-1$, $\Delta_0 = [t_1^*, t_1]$.

На каждом сегменте Δ_k (аналогично Δ_k^*) функцию $\varphi(t)$ будем аппроксимировать полиномом $\varphi(\Delta_k, t)$, который построен при доказательстве теоремы 1.1.

Интеграл $I\varphi$ будем вычислять по квадратурной формуле

$$I\varphi \equiv \int\limits_{-1}^{1} \frac{\varphi(\tau)}{\tau^v} d\tau =$$

$$= \sum_{k=1}^{N-1} \left[\int\limits_{\Delta_k} P_r \left[\frac{\varphi(\Delta_k, \tau) - T_v(\varphi(\Delta_k, \tau), 0)}{\tau^v}, \Delta_k \right] d\tau + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{\Delta_k^*} P_r \left[\frac{\varphi(\Delta_k^*, \tau) - T_v(\varphi(\Delta_k^*, \tau), 0)}{\tau^v}, \Delta_k^* \right] d\tau \right] +$$

$$+ \sum_{k=0}^{r-1} \frac{\varphi^{(k)}(0)(1 - (-1)^{k+1-v})}{k!(k+1-v)} t_1^{k+1-v} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{N-1} \left[T_v(\varphi(\Delta_k, \tau), 0) \int\limits_{\Delta_k} \frac{d\tau}{\tau^v} + T_v(\varphi(\Delta_k^*, \tau), 0) \int\limits_{\Delta_k^*} \frac{d\tau}{\tau^v} \right] + R_N(\varphi), \qquad (1.8)$$

где $P_r(\varphi, \Delta_k)$– оператор, проектирующий функции $\varphi \in C(\Delta_k)$ на множество интерполяционных полиномов степени $r-1$, построенных по r узлам, являющимися образами узлов полинома Лежандра степени r и полученными при линейном отображении сегмента $[-1,1]$ на сегмент Δ_k.

Замечание. Выражение $\int\limits_{\Delta_k} P_r(\varphi, \Delta_k) dt$ эквивалентно квадратурной формуле Гаусса, построенной на сегменте Δ_k.

Опишем построение полинома $T_r(\varphi(\Delta_k, \tau), 0)$. Полином $\varphi(\Delta_k, \tau)$, первоначально построенный на сегменте Δ_k, естественным способом распространяется на сегмент $[-1,1]$. На этом сегменте полином $\varphi(\Delta_k, \tau)$ представим в виде отрезка ряда Тейлора по степеням функции τ до $(r-1)$-го порядка. Через $T_p(\varphi(\Delta_k,\tau),0)$ обозначено значение отрезка ряда Тейлора функции $\varphi(\Delta_k,\tau)$ по степеням τ до p-го порядка включительно в точке 0.

Теорема 1.9. Пусть $\Psi = W^r_\infty(1)$. Среди всевозможных квадратурных формул вида (1.1), использующих $(2N+1)(r+1)$ значений, асимптотически оптимальной является квадратурная формула (1.8). Ее погрешность равна

$$R_N[W^r_\infty(1)] = \frac{2+o(1)}{4^r r!}\left(\frac{r+1}{r+1-v}\right)^{r+1}\frac{1}{N^r}.$$

Доказательство. Оценка снизу величины $\zeta_N[W^r_\infty(1)]$ приведена в теореме 1.1. Там же доказано, что квадратурная формула (1.3) является асимптотически оптимальной. Таким образом, осталось доказать, что погрешность квадратурной формулы (1.8) совпадает с погрешностью квадратурной формулы (1.3). Это следует из того, что функция $\psi(\tau) = (\varphi(\Delta_k,\tau)-T_v(\varphi(\Delta_k,\tau),0))/\tau^v$ является полиномом степени $r-1-v$, а квадратурная формула $\int\limits_{\Delta_k} P_r[\psi(\tau)]d\tau$ точна для полиномов степени $2r-1$, так как является квадратурной формулой Гаусса.

Теорема доказана.

В квадратурной формуле (1.8) используются производные от подынтегральной функции $\varphi(t)$ до $(r-1)$-го порядка. Поэтому более удобной в практическом отношении является следующая квадратурная формула, хотя она является только оптимальной по порядку.

Воспользуемся узлами t_k и t_k^*, $k=0,1,\ldots,N$, введенными при доказательстве предыдущей теоремы. Покроем сегмент $[-1,1]$ более мелкими сегментами $\Delta_0,\Delta_k,\Delta_k^*$, $k=1,2,\ldots,N-1$, где $\Delta_0=[t_1^*,t_1]$, а сегменты Δ_k,Δ_k^*, $k=1,2,\ldots,N-1$, введены при доказательстве предыдущей теоремы.

Обозначим через $\zeta_1,\ldots,\zeta_r$ узлы полинома Лежандра порядка r, определенные на сегменте $[-1,1]$. Через $\zeta_1^k,\ldots,\zeta_r^k$ $(\zeta_1^{*k},\ldots,\zeta_r^{*k})$ обозначим образы узлов $\zeta_1,\ldots,\zeta_r$ при линейном отображении сегмента $[-1,1]$ на сегмент Δ_k (Δ_k^*), $k=1,2,\ldots,N-1$. Через $\zeta_1^0,\ldots,\zeta_r^0$ обозначим образы узлов $\zeta_1,\ldots,\zeta_r$, полученные при линейном отображении сегмента $[-1,1]$ на сегмент $[t_1^*,t_1]$.

Обозначим через $P_r(t,\Delta_k)$ полином, интерполирующий функции $\varphi(t)$ по узлам ζ_i^k, $i=1,2,\ldots,r$, $k=1,2,\ldots,N-1$. Аналогичным образом определяются полиномы $P_r(t,\Delta_0)$ и $P_r(t,\Delta_k^*)$, $k=1,2,\ldots,N-1$. Если

$0 \notin \Delta_k$, то под $P_r(0, \Delta_k)$ понимается значение полинома $P_r(\tau, \Delta_k)$, продолженного на сегмент $[-1, 1]$, в точке $t = 0$. Через $P_r(f, \Delta_k)$ обозначим оператор, проектирующий функцию $f \in C(\Delta_k)$ на интерполяционный полином $P_r(t, \Delta_k)$, $k = 1, 2, \ldots, N-1$. Аналогичным образом определяются операторы $P_r(f, \Delta_0)$ и $P_r(f, \Delta_k^*)$, $k = 1, 2, \ldots, N-1$.

Воспользовавшись приведенными обозначениями, построим квадратурную формулу:

$$I\varphi \equiv \int_{-1}^{1} \frac{\varphi(\tau)}{\tau^v} d\tau =$$

$$= \sum_{k=1}^{N-1} \left[\int_{\Delta_k} P_r \left[\frac{P_r(\tau, \Delta_k) - T_{v-1}(P_r(\tau, \Delta_k), 0)}{\tau^v}, \Delta_k \right] d\tau + \right.$$

$$\left. + \int_{\Delta_k^*} P_r \left[\frac{P_r(\tau, \Delta_k^*) - T_{v-1}(P_r(\tau, \Delta_k^*), 0)}{\tau^v}, \Delta_k^* \right] d\tau \right] +$$

$$+ \int_{\Delta_0} P_r \left[\frac{P_r(\tau, \Delta_0) - T_{v-1}(P_r(\tau, \Delta_0), 0)}{\tau^v}, \Delta_0 \right] d\tau +$$

$$+ \sum_{k=1}^{N-1} \left[\int_{\Delta_k} \frac{T_{v-1}(P_r(\tau, \Delta_k), 0) d\tau}{\tau^v} + \int_{\Delta_k^*} \frac{T_{v-1}(P_r(\tau, \Delta_k^*), 0) d\tau}{\tau^v} \right] +$$

$$+ \int_{\Delta_0} \frac{T_{v-1}(P_r(\tau, \Delta_0), 0) d\tau}{\tau^v} + R_N(t_k, p_k, \varphi). \tag{1.9}$$

Теорема 1.10. Среди всевозможных квадратурных формул вида (1.1) при $\rho = 0$ формула (1.9) является оптимальной по порядку на классе функций $W^r(1)$. Ее погрешность равна $R_N[W^r(1)] \asymp N^{-r}$.

Доказательство. Оценка снизу величины $\zeta_N[W^r(1)]$ получена при доказательстве теоремы 1.1.

Приступим к оценке $R_N[W^r(1)]$. Обозначим через $\varphi_N(t)$ сплайн, составленный из полиномов $P_r(t, \Delta_0)$, $P_r(t, \Delta_k)$, $P_r(t, \Delta_k^*)$, $k = 1, 2, \ldots, N-$ -1. Повторяя рассуждения, проделанные выше при доказательстве теоремы 1.1, можно показать, что

$$\left| \int_{-1}^{1} \frac{\varphi(\tau) - \varphi_N(\tau)}{\tau^p} d\tau \right| \leq AN^{-r}.$$

Эквивалентность квадратурной формулы (1.9) и интеграла $\int\limits_{-1}^{1} \frac{\varphi_N(\tau)}{\tau^p} d\tau$ следует из рассуждений, аналогичных приведенным при доказательстве теоремы 1.9.

Теорема доказана.

По аналогии с доказательствами теорем 1.9 и 1.10, доказываются следующие утверждения.

Теорема 1.11. Среди всевозможных квадратурных формул вида (1.2) асимптотически оптимальной на классе $W^r_\infty(1)$ является формула

$$F\varphi \equiv \int\limits_{-1}^{1} \frac{\varphi(\tau)d\tau}{|\tau|^{p+\lambda}} = \sum_{k=0}^{N-1} \left[\int\limits_{\Delta_k} \frac{T_{r-1}(\varphi(\Delta_k, \tau), 0)d\tau}{|\tau|^{p+\lambda}} + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{\Delta_k^*} \frac{T_{r-1}(\varphi(\Delta_k^*, \tau), 0)d\tau}{|\tau|^{p+\lambda}} \right] + R_N(t_k, p_k, \varphi), \qquad (1.10)$$

в которой $t_k = (k/N)^{(r+1)/(r+1-\nu-\lambda)}$, $t_k^* = -(k/N)^{(r+1)/(r+1-v-\lambda)}$, $k = 1, 2, \ldots, N$. $\Delta_k = [t_k, t_{k+1}]$, $\Delta_k^* = [t_{k+1}^*, t_k^*]$, $k = 0, 1, \ldots, N-1$. Погрешность квадратурной формулы (1.10) равна

$$R_N[W^r_\infty(1)] = (2 + o(1)) \left(\frac{r+1}{r+1-v-\lambda} \right)^{r+1} \frac{1}{4^r N^r r!}.$$

Теорема 1.12. Среди всевозможных квадратурных формул вида (1.2) при $\rho = r-1$ формула (1.10), в которой $t_k = (k/N)^{(r+1/q)/(r+1/q-\nu-\lambda)}$, $t_k^* = -(k/N)^{(r+1/q)/(r+1/q-v-\lambda)}$, $k = 1, 2, \ldots, N$, $\Delta_k = [t_k, t_{k+1}]$, $\Delta_k^* = [t_{k+1}^*, t_k]$, $k = 0, 1, \ldots, N-1$, является асимптотически оптимальной по порядку на классе $W^r(1)$. Ее погрешность равна $R_N[W^r(1)] \asymp N^{-r}$.

Более удобной в практическом отношении является формула

$$F\varphi \equiv \int\limits_{-1}^{1} \frac{\varphi(\tau)}{|\tau|^{p+\lambda}} d\tau = R_N(t_k, p_k, \varphi) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{N-1} \left[\int\limits_{\Delta_k} \frac{T_{r-1}(P_r(\tau, \Delta_k), 0)d\tau}{\tau^{p+\lambda}} - \int\limits_{\Delta_k^*} \frac{T_{r-1}(P_r(\tau, \Delta_k^*), 0)d\tau}{\tau^{p+\lambda}} \right]. \qquad (1.11)$$

Теорема 1.13. Среди всевозможных квадратурных формул вида (1.2) при $\rho = 0$ формула (1.11) является оптимальной по порядку на классе $W^r(1)$. Ее погрешность равна $R_N[W^r(1)] \asymp N^{-r}$.

2. Интегралы с фиксированной сингулярностью, определенные на координатной оси

Рассмотрим метод вычисления интеграла Адамара с фиксированной особенностью

$$Jf = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(\tau)}{\tau^p} d\tau, \qquad (2.1)$$

на классе функций $W_\rho^r(1),\ r \geq p$, где функция $\rho(t)$ равна

$$\rho(t) = \begin{cases} 1, -1 \leq t \leq 1, \\ \frac{1}{|t|^\lambda}, t \in (-\infty, \infty) \setminus [-1, 1], \end{cases}$$

$\lambda > 0, \lambda + p + 1 > r$.

В качестве метода вычисления используется квадратурная формула

$$Jf = \sum_{k=-N}^{N}{}' \sum_{l=0}^{\beta} p_{kl} f^{(l)}(t_k) + R_N(f), \qquad (2.2)$$

где $-A \leq t_{-N} < \ldots < t_{-1} < t_0 < t_1 < \ldots < t_N \leq A, 0 \leq \beta \leq r-1, \sum'$ означает суммирование по $k \neq 0$.

Пусть $A\ \ (A > 0)-$ вещественное число, $-A \leq v_{-N} < v_{-N+1} < \cdots < < v_{-1} < v_0 < v_1 < \cdots < v_N \leq A$. (Значения $v_k,\ k = -N, \ldots, N$, будут определены ниже).

Для аппроксимации функции $f(t)$ на сегменте $[v_k, v_{k+1}]$ воспользуемся полиномом $f([v_k, v_{k+1}], t)$, описанным в предыдущем разделе. Сплайн, составленный из функций $f([v_k, v_{k+1}], \sigma)$, обозначим через $\tilde{f}(\sigma)$.

Теорема 2.1. Среди всевозможных квадратурных формул вида (2.1), использующих $2N(\beta+1),\ \beta = r-1$ значений подынтегральной функции, на классе $\Psi = W_\rho^r(1)$ асимптотически оптимальной является квадратурная формула

$$Jf = \sum_{k=1}^{N_1-1} \left(\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{\tilde{f}(\tau)}{\tau^p} d\tau + \int\limits_{t_{-k-1}}^{t_{-k}} \frac{\tilde{f}(\tau)}{\tau^p} d\tau \right) + \sum_{k=0}^{r-1}{}'' \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \frac{(-1)^{p-k-1} - 1}{(p-k-1) t_1^{p-k-1}} +$$

$$+ \sum_{k=M_0}^{M_1-1} \left(\int\limits_{v_{k+1}}^{v_k} \frac{\tilde{f}(\tau)}{\tau^p} d\tau + \int\limits_{v_{-k}}^{v_{-k-1}} \frac{\tilde{f}(\tau)}{\tau^p} d\tau \right) + R_N(f), \qquad (2.3)$$

где

$$t_{\pm k} = \pm \left(\frac{k}{N_1} \right)^{(r+1)/(r+1-p)}, k = 0, 1, \ldots, N_1,$$

$$v_{\pm k} = \pm\left(\frac{M_1}{k}\right)^{(r+1)/(\lambda-r-1+p)}, k = M_0, M_0+1, \ldots, M_1,\ p+\lambda > r+1,$$

$$M_0 = \left[\frac{N_2}{A^{(\lambda-r-1+p)/(r+1)}-1}\right],\quad M_1 = \left[\frac{N_2 A^{(\lambda-r-1+p)/(r+1)}}{A^{(\lambda-r-1+p)/(r+1)}-1}\right],$$

$$N_1 = \left[\frac{\lambda-r-1+p}{\lambda-(r+1-p)A^{(r+1-p-\lambda)/(r+1)}}N\right],$$

$$N_2 = \left[\frac{(r+1-p)(1-A^{(r+1-p-\lambda)/(r+1)})}{\lambda-(r+1-p)A^{(r+1-p-\lambda)/(r+1)}}N\right],$$

$\sum''$ означает суммирование по $k \neq p-1$, $[\alpha]-$ целая часть числа α. Погрешность квадратурной формулы (2.3) не превосходит величины

$$R_N[\Psi] =$$

$$= \frac{(1+o(1))}{2^{2r-1}r!}\left(\frac{(r+1)(\lambda-(r+1-p)A^{(r+1-p-\lambda)/(r+1)})}{(r+1-p)(\lambda-r-1+p)}\right)^{r+1}\frac{1}{N^r}. \qquad (2.4)$$

Доказательство. Найдем оценку снизу погрешности квадратурных формул вида (2.2). Учитывая симметричность формулы (2.2), достаточно ограничиться рассмотрением промежутка $[0,\infty)$. Пусть узлы квадратурной формулы расположены на сегменте $[0,A]$ и промежуток $[0,\infty)$ разбит на три части: $[0,1],[1,A],[A,\infty)$. Обозначим через N_1 число узлов t_k квадратурной формулы (2.2), расположенных на сегменте $[0,1], N_2 = M_1 - M_0 + 1-$ число узлов t_k , расположенных на сегменте $[1,A]$. Очевидно, $N_1+N_2 = N+s$, где s может принимать значения $s=-1,0,1$. Такая неопределенность обусловлена тем, что N_1 и N_2 выражаются через целые части выражений, которые могут принимать нецелые значения. Эта неопределенность не влияет на дальнейшие рассуждения.

Рассмотрим интеграл

$$\int\limits_0^1 \frac{f(\tau)}{\tau^p}d\tau.$$

Используем следующие обозначения:

$$S_{\pm k} = \pm(k/N_1)^{(r+1)/(r+1-p)} \quad (k=0,1,\ldots,N_1), l = [N_1/[\ln N_1]],$$

N_k^*- число узлов квадратурной формулы (2.2) в сегменте $\Delta_k = [S_k^*, S_{k+1}^*]$, $k = 0,1,\ldots,l$, где $S_k^* = S_{k[\ln N_1]}, k = 0,1,\ldots,l-1, S_{l+1}^* = 1$ по определению, $f^+(t) = (f(t)+|f(t)|)/2$, $f^-(t) = (f(t)-|f(t)|)/2$.

При получении оценки снизу можно ограничиться рассмотрением сегмента $[0,1]$. На этом сегменте построим функцию $f^*(t)$, равную нулю при $t \in [0, S_{[\ln N_1]}]$, принадлежащую классу $W^r(1)$ и обращающуюся в нуль вместе со своими производными до $(r-1)$-го порядка включительно в узлах t_k $(k = 1,2,\dots,N_1)$ квадратурной формулы и точках S_k^* $(k = 1,2,\dots,l+1)$. Кроме этого, потребуем, чтобы

$$\int\limits_{S_k^*}^{S_{k+1}^*} f^*(\tau)d\tau \geq 0, \quad k = 0,1,\dots,l.$$

Очевидно,

$$\int\limits_0^1 \frac{f^*(\tau)}{\tau^p}d\tau \geq \sum_{k=1}^{l}\left[\frac{1}{(S_{k+1}^*)^p}\int\limits_{S_k^*}^{S_{k+1}^*} f^*(\tau)d\tau + \left(\frac{1}{(S_k^*)^p} - \frac{1}{(S_{k+1}^*)^p}\right)\int\limits_{S_k^*}^{S_{k+1}^*} f^{*-}(\tau)d\tau\right] =$$

$$= I_1 + I_2.$$

В монографии С. М. Никольского [65] показано,что при любом распределении узлов t_k

$$\inf_{p_{kl}}\sup_{\varphi\in W^r(1)}\left|\int\limits_0^1 \varphi(\tau)d\tau - \sum_{k=1}^{N}\sum_{l=0}^{r-1} p_{kl}\varphi(t_k)\right| \geq$$

$$\geq \frac{1}{r!\left[4(N-1) + 2\sqrt[r]{r+1}\ \right]^r}. \tag{2.5}$$

Из следствия леммы С. А. Смоляка, приведенного в главе 1 первой части книги, имеем:

$$\sup_{\varphi\in W^r(1);\varphi^{(j)}(v_i)=0;i=1,2,\dots,N_k+2;j=0,1,\dots,r-1}\int\limits_{S_k^*}^{S_{k+1}^*}\varphi(\tau)d\tau \geq$$

$$\geq (S_{k+1}^* - S_k^*)^{r+1}\inf_{p_{kl},v_k}\sup_{\varphi\in W^r(1)}\left|\int\limits_0^1\varphi(\tau)d\tau - \sum_{k=1}^{N_k+2}\sum_{l=0}^{r-1}p_{kl}\varphi^{(l)}(v_k)\right|, \tag{2.6}$$

где v_k- множество, состоящее из узлов квадратурной формулы, расположенных на сегменте Δ_k и концов этого сегмента. Следовательно,

$$\sup_{\varphi\in W^r(1);\varphi^{(j)}(v_i)=0}\int\limits_{S_k^*}^{S_{k+1}^*} f(\tau)d\tau \geq \frac{(S_{k+1}^* - S_k^*)^{r+1}}{r!\left[4(N_k^*-1) + 2\sqrt[r]{r+1}\ \right]^r}.$$

Тогда

$$I_1 = \sum_{k=1}^{l} \frac{1}{(S^*_{k+1})^p} \int\limits_{S^*_k}^{S^*_{k+1}} f^*(\tau)d\tau \geq \sum_{k=1}^{l} \frac{(S^*_{k+1}-S^*_k)^{r+1}}{(S^*_{k+1})^p r! \left[4(N^*_k-1)+2\sqrt[r]{r+1}\,\right]^r} \geq$$

$$\geq (1+o(1)) \left(\frac{r+1}{r+1-p}\right)^{r+1} \frac{1}{r!} \left(\frac{[\ln N_1]}{N_1}\right)^{r+1} \sum_{k=[\ln N_1]}^{l} \frac{1}{\left[4(N^*_k-1)+2\sqrt[r]{r+1}\,\right]^r}.$$

Найдем распределение узлов N_k, минимизирующих сумму:

$$V = \sum_{k=[\ln N_1]}^{l} \frac{1}{\left[4(N^*_k-1)+2\sqrt[r]{r+1}\,\right]^r},$$

если $\sum\limits_{k=1}^{l} N^*_k = N_1$.

Эта сумма может быть только уменьшена, если предположить, что

$$N^*_{[\ln N_1]} + N^*_{[\ln N_1]+1} + \ldots + N^*_l = N_1.$$

Нетрудно убедиться, применяя стандартные методы математического анализа, что сумма V достигает минимума, если

$$N^*_{[\ln N_1]} = N^*_{[\ln N_1]+1} = \ldots = N^*_l = \frac{N_1}{l-[\ln N_1]+1}$$

и этот минимум равен

$$(1+o(1))\frac{l^{r+1}}{(4N_1)^r}.$$

Таким образом, показано, что минимум достигается при значениях

$$N^*_{[\ln N_1]} = \ldots = N^*_l = \frac{N_1}{l-[\ln N_1]+1},$$

которые могут быть не целыми числами. Так как нами рассматривается задача минимизации при условии, что $N^*_i, i = l, l+1, \ldots, [\ln N_1]-$ целые числа, то минимальное значение функции V будет не меньше, чем

$$(1+o(1))\frac{l^{r+1}}{(4N_1)^r}.$$

Следовательно, I_1 не превосходит величину

$$(1+o(1))(r+1)^{r+1}/4^r(r+1-p)^{r+1}r!N_1^r.$$

Перейдем к оценке I_2:

$$I_2 = \sum_{k=1}^{l} \left(\frac{1}{(S_k^*)^p} - \frac{1}{(S_{k+1}^*)^p} \right) \int_{S_k^*}^{S_{k+1}^*} f^{*-}(\tau) d\tau \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{l} \frac{(r+1)p}{(r+1-p)} \left(\frac{N_1}{[\ln N_1]} \right)^{p(r+1)/(r+1-p)} k^{-(r+1+rp)/(r+1-p)} \int_{S_k^*}^{S_{k+1}^*} f^{*-}(\tau) d\tau.$$

По построению в каждом интервале $[S_k^*, S_{k+1}^*]$ имеется, по крайней мере, по одному узлу, в котором функция $f^*(t)$ вместе со своими производными до $(r-1)$-го порядка обращается в нуль. Возьмем в каждом интервале по одному такому узлу и обозначим его через

$$S_k^{**} \ (k = 1, 2, \dots, l).$$

В интервале $[S_k^*, S_{k+1}^*]$ функция $f^*(t)$ может быть представлена в виде

$$f^*(\tau) = \frac{1}{(r-1)!} \int_{S_k^{**}}^{\tau} (\tau - t)^{r-1} f^{*(r)}(t) dt$$

и, следовательно,

$$\left| \int_{S_k}^{S_{k+1}} f^{*-}(\tau) d\tau \right| \leq \int_{S_k}^{S_{k+1}} |f^*(\tau)| d\tau \leq (S_{k+1} - S_k)^{r+1} / (r+1)! \ .$$

Поэтому

$$|I_2| \leq \frac{p}{(r+1)!} \left(\frac{r+1}{r+1-p} \right)^{r+2} \left(\frac{[\ln N_1]}{N_1} \right)^{r+1} [\ln N_1] = o(N_1^{-r}).$$

Отсюда и из оценки суммы I_1 следует, что верхняя грань оценки снизу величины погрешности на сегменте $[0, 1]$ не меньше величины

$$(1 + o(1)) \left(\frac{r+1}{r+1-p} \right)^{r+1} \frac{1}{4^r r! \ N_1^r}. \tag{2.7}$$

Рассмотрим интеграл

$$\int_1^A \frac{f(\tau)}{\tau^p} d\tau.$$

Введем обозначения: $s = [(M_1 - M_0)/[\ln N_2]]$,

$$v_k^* = \left(\frac{M_1}{M_0 + k[\,\ln N_2]}\right)^{(r+1)/(\lambda-r-1+p)}, k = 0, 1, \ldots, s,\ v_{s+1}^* = 1,$$

N_k^*– число узлов квадратурной формулы в сегменте $\Delta_k = [v_k^*, v_{k+1}^*]$, $k = 0, 1, \ldots, s$, $f^+(t) = (f(t) + |f(t)|)/2$, $f^-(t) = (f(t) - |f(t)|)/2$.

Пусть $\{w_k\}$– объединение узлов $\{v_k^*\}$ и $\{t_k\}$,принадлежащих $[1, A]$.

Для получения оценки снизу на сегменте $[1, A]$ построим функцию $\varphi^*(t)$, принадлежащую классу $W_\rho^r(1)$ и обращающуюся в нуль вместе со своими производными до $(r-1)$-го порядка включительно в узлах

$$w_k, k = 1, \ldots, M_1 - M_0 + s + 1,$$

и удовлетворяющую неравенству

$$\int\limits_{v_{k+1}^*}^{v_k^*} \varphi^*(\tau)d\tau \geq 0.$$

Тогда

$$\int\limits_1^A \frac{f^*(\tau)}{\tau^p}d\tau = \sum_{k=0}^s \int\limits_{v_{k+1}^*}^{v_k^*} \frac{\varphi^*(\tau)}{\tau^{\lambda+p}}d\tau \geq$$

$$\geq \sum_{k=0}^s \frac{1}{(v_k^*)^{\lambda+p}} \int\limits_{v_{k+1}^*}^{v_k^*} \varphi^*(\tau)d\tau + \sum_{k=0}^s \frac{(v_k^*)^{\lambda+p} - (v_{k+1}^*)^{\lambda+p}}{(v_k^*\ v_{k+1}^*)^{\lambda+p}} \int\limits_{v_{k+1}^*}^{v_k^*} \varphi^{*-}(\tau)d\tau = I_3 + I_4.$$

Учитывая неравенства (2.5) и (2.6) имеем оценку:

$$\sup_{\varphi\in W^r(1);\varphi^{(j)}(v_i)=0} \int\limits_{v_{k+1}^*}^{v_k^*} \varphi^*(\tau)d\tau \geq \frac{(v_k^* - v_{k+1}^*)^{r+1}}{r!\left[4(N_k^* - 1) + 2\sqrt[r]{r+1}\ \right]^r}.$$

Тогда

$$I_3 = \sum_{k=0}^s \frac{1}{(v_k^*)^{\lambda+p}} \int\limits_{v_{k+1}^*}^{v_k^*} \varphi^*(\tau)d\tau = \sum_{k=0}^s \frac{1}{(v_k^*)^{\lambda+p}} \frac{(v_k^* - v_{k+1}^*)^{r+1}}{r![4(N_k^* - 1) + 2\sqrt[r]{r+1}\ ]^r} \geq$$

$$\geq \left(\frac{[\,\ln N_2]}{M_1}\right)^{r+1} \left(\frac{r+1}{\lambda - r - 1 + p}\right)^{r+1} \frac{1}{r!} \sum_{k=0}^s \frac{1}{[4(N_k^* - 1) + 2\sqrt[r]{r+1}\ ]^r}.$$

Осталось найти распределение узлов N_k, минимизирующих сумму

$$V=\sum_{k=0}^{s}\frac{1}{[4(N_k^*-1)+2\sqrt[r]{r+1}\ ]^r}$$

при условии

$$\sum_{k=0}^{s}N_k^*=N_2.$$

Стандартными методами математического анализа можно показать, что точка

$$N_0^*=\ldots=N_s^*=[\ \ln N_2]$$

доставляет минимум сумме V.

Следовательно,

$$I_3\geq\frac{(A^{(\lambda-r-1+p)/(r+1)}-1)^{r+1}}{N_2^rA^{\lambda-r-1+p}r!4^r}\left(\frac{r+1}{\lambda-r-1+p}\right)^{r+1}.$$

Оценим I_4:

$$I_4=\sum_{k=0}^{s}\frac{(v_k^*)^{\lambda+p}-(v_{k+1}^*)^{\lambda+p}}{(v_k^*\ v_{k+1}^*)^{\lambda+p}}\int\limits_{v_{k+1}^*}^{v_k^*}\varphi^{*-}(\tau)d\tau\leq$$

$$\leq\sum_{k=0}^{s}\left(\frac{[\ \ln N_2]}{M_1}\right)^{\frac{(r+1)(\lambda+p)}{\lambda-r-1+p}}\frac{(r+1)(\lambda+p)}{\lambda-r-1+p}k^{\frac{(r+1)(\lambda+p)}{\lambda-1-r+p}-1}\int\limits_{v_{k+1}^*}^{v_k^*}\varphi^{*-}(\tau)d\tau.$$

По построению в каждом интервале $[v_k^*,v_{k+1}^*]$ имеется, по крайней мере, по одному узлу, в котором функция $\varphi^*(t)$ вместе со своими производными до $(r-1)$-го порядка обращается в нуль. Возьмем в каждом интервале по одному узлу и обозначим его через v_k^{**} $(k=0,1,\ldots,s)$.

В интервале $[v_k^*,v_{k+1}^*]$ функция $\varphi^*(t)$ может быть представлена в виде

$$\varphi^*(\tau)=\frac{1}{(r-1)!}\int\limits_{v_k^{**}}^{\tau}(\tau-t)^{r-1}\varphi^{*(r)}(t)dt,$$

и, следовательно,

$$\left|\int\limits_{v_{k+1}^*}^{v_k^*}\varphi^{*-}(\tau)d\tau\right|\leq\int\limits_{v_{k+1}^*}^{v_k^*}|\varphi^*(\tau)|d\tau\leq\frac{1}{(r+1)!}(v_k^*-v_{k+1}^*)^{r+1}=$$

$$= \frac{p+\lambda}{(r+1)!}\left(\frac{r+1}{\lambda-r-1+p}\right)^{r+2}\frac{([\ln N_2])^r}{M_1^{r+1}}.$$

Поэтому $|I_4| = o(N_2^{-r})$.

Отсюда и из оценки I_3 следует, что верхняя грань оценки снизу на $[1, A]$ не меньше величины

$$(1+o(1))\frac{(A^{(\lambda-r-1+p)/(r+1)}-1)^{r+1}}{N_2^r A^{\lambda-r-1+p} r!\ 4^r}\left(\frac{r+1}{\lambda-r-1+p}\right)^{r+1}. \qquad (2.8)$$

Рассмотрим интеграл

$$\int_A^\infty \frac{f(\tau)}{\tau^p} d\tau\ .$$

Используя формулу 24 стр. 298 из [67], приходим к неравенству:

$$\sup_{\varphi\in W_\rho^r(1)} \int_A^\infty \frac{\varphi(\tau)}{\tau^{\lambda+p}} d\tau \geq \frac{1}{r!}\int_A^\infty \frac{(\tau-A)^r}{\tau^{\lambda+p}} d\tau = \frac{D(r,\lambda,p)}{r!\ A^{\lambda-r-1+p}}, \qquad (2.9)$$

где

$$D(r,\lambda,p) = \sum_{k=0}^r \frac{r!(-1)^k}{k!(r-k)!(\lambda-r-1+p+k)} -$$

константа, зависящая от r, p и λ.

Найдем наилучшее распределение узлов N_1 и N_2 на сегментах $[0,1]$ и $[1, A]$.

Для этого нужно найти минимум функции

$$F(N_1,N_2) = \left(\frac{r+1}{r+1-p}\right)^{r+1}\frac{1}{4^r r!\ N_1^r} +$$

$$+\frac{(A^{(\lambda-r-1+p)/(r+1)}-1)^{r+1}}{4^r r!\ N_2^r A^{\lambda-r-1+p}}\left(\frac{r+1}{\lambda-r-1+p}\right)^{r+1} + \frac{D(r,p,\lambda)}{r! A^{\lambda-r-1+p}}$$

при условии $N_1 + N_2 = N$.

Минимум достигается при

$$N_1 = \left[\frac{\lambda-r-1+p}{\lambda-(r+1-p)A^{(r+1-\lambda-p)/(r+1)}} N\right],$$

$$N_2 = \left[\frac{(r+1-p)(1-A^{(r+1-\lambda-p)/(r+1)})}{\lambda-(r+1-p)A^{(r+1-p-\lambda)/(r+1)}} N\right],$$

$$A=\left(\frac{4N}{\lambda}\left(\frac{\lambda-r-1+p}{r+1}\right)^{\frac{r+1}{r}}(2D(r,\lambda,p))^{1/r}+\frac{1}{\lambda}\right)^{\frac{r+1}{\lambda-r-1+p}}. \qquad (2.10)$$

Таким образом, верхняя грань оценки снизу вычисления интеграла $\int\limits_0^A \frac{f(\tau)}{\tau^p}d\tau$ на классе $W_\rho^r(1)$ не превосходит величины

$$\frac{1+o(1)}{4^r r!}\left(\frac{(r+1)(\lambda-(r+1-p)A^{(r+1-\lambda-p)/(r+1)})}{(r+1-p)(\lambda-r-1+p)}\right)^{r+1}\frac{1}{N^r}$$

при любом выборе узлов $\{t_k\}, k=1,2,\ldots,M$ и $\{v_l\}, l=1,2,\ldots,n$.

Из полученных соотношений (2.7) $-$ (2.10) следует оценка снизу

$$\zeta_N[\Psi]\geq(1+o(1))\frac{1}{2^{2r-1}r!}\left(\frac{(r+1)(\lambda-(r+1-p)A^{(r+1-p-\lambda)/(r+1)})}{(r+1-p)(\lambda-r-1+p)}\right)^{r+1}\frac{1}{N^r}.$$

Оценим погрешность квадратурной формулы (2.3):

$$|R_N(\varphi)|\leq 2\left|\sum_{k=1}^{N_1-1}\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}}\frac{\varphi(\tau)-\tilde{\varphi}(\tau)}{\tau^p}d\tau\right|+$$

$$+\left|\int\limits_{t_{-1}}^{t_1}\frac{\varphi(\tau)}{\tau^p}d\tau-\sum_{k=1}^{r-1}\frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!\,k}N_1^{-k(r+1)/(r+1-p)}(1-(-1)^k)\right|+$$

$$+2\left|\sum_{k=M_0}^{M_1-1}\int\limits_{v_{k+1}}^{v_k}\frac{\varphi(\tau)-\tilde{\varphi}(\tau)}{\tau^{\lambda+p}}d\tau\right|+2\left|\frac{1}{r!}\int\limits_A^\infty\frac{\varphi(\tau)}{\tau^{\lambda+p}}d\tau\right|=r_1+r_2+r_3+r_4.$$

Для оценки погрешностей r_1 и r_2 воспользуемся результатом предыдущего раздела. Проводя аналогичные рассуждения, получаем:

$$r_1=2\left|\sum_{k=1}^{N_1-1}\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}}\frac{f(\tau)-\tilde{f}(\tau)}{\tau^p}d\tau\right|=$$

$$=2\left|\sum_{k=1}^{N_1-1}\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}}\frac{1}{\tau^p}\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}}\left(\frac{K_r(\tau-t)}{(r-1)!}-\sum_{j=0}^{r-1}\frac{B_{kj}K_{r-j}(t_{k+1}-t_k)}{r(r-1-j)!}\right)f^{(r)}(t)dtd\tau\right|=$$

$$=2\left|\sum_{k=1}^{N_1-1}\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}}f^{(r)}(t)\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}}\frac{1}{\tau^p}\left(\frac{K_r(\tau-t)}{(r-1)!}-\sum_{j=0}^{r-1}\frac{B_{kj}K_{r-j}(t_{k+1}-t)}{(r-1-j)!}\right)d\tau dt\right|\leq$$

$$\leq 2\sum_{k=1}^{N_1-1}\frac{1}{t_k^p}\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}}|f^{(r)}(t)|\left|\frac{(t_{k+1}-t)^r}{r!}-\sum_{j=0}^{r-1}\frac{B_{kj}(t_{k+1}-t_k)}{(r-1-j)!}(t_{k+1}-t)^{r-j-1}\right|dt\leq$$

$$\leq\frac{2}{r!}\sum_{k=1}^{N_1-1}\frac{1}{t_k^p}\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}}\left|(t_{k+1}-t)^r-\sum_{j=0}^{r-1}\frac{r!\;B_{kj}(t_{k+1}-t_k)}{(r-1-j)!}(t_{k+1}-t)^{r-j-1}\right|dt\;.$$

Известно, что (С. М. Никольский [65])

$$\int\limits_{a-h}^{a+h}|R_{rq}(a,h,x)|^q dx=\frac{2h^{rq+1}[R_{rq}(1)]^q}{rq+1}.$$

Тогда

$$r_1\leq 4R_{r1}(1)\sum_{k=1}^{M-1}\frac{((t_{k+1}-t_k)/2)^{r+1}}{t_k^p(r+1)!}\leq$$
$$\leq(1+o(1))\frac{1}{2^{2r-1}r!\;N_1^r}\left(\frac{r+1}{r+1-p}\right)^r, \tag{2.11}$$

$$r_2=\left|\int\limits_{t_{-1}}^{t_1}\frac{1}{\tau^p}\left(f(\tau)-\sum_{k=0}^{r-1}\frac{f^{(k)}(0)\tau^k}{k!}\right)d\tau\right|=$$
$$=\frac{1}{(r-1)!}\left|\int\limits_{t_{-1}}^{t_1}\frac{1}{\tau^p}\left(\int\limits_0^\tau(\tau-t)^{r-1}f^{(r)}(t)dt\right)d\tau\right|\leq$$
$$\leq\frac{2}{r!(r+1-p)N_1^{r+1}}=o(N_1^{-r}), \tag{2.12}$$

$$r_3\leq 2\left|\sum_{k=M_0}^{M_1}\int\limits_{v_{k+1}}^{v_k}\frac{\varphi(\tau)-\tilde{\varphi}(\tau)}{\tau^{\lambda+p}}d\tau\right|=$$
$$=2\left|\sum_{k=M_0}^{M_1}\int\limits_{v_{k+1}}^{v_k}\frac{1}{\tau^{\lambda+p}}\left[\frac{1}{(r-1)!}\int\limits_{v_{k+1}}^{v_k}K_r(\tau-v)\varphi^{(r)}(v)dv-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\sum_{l=0}^{r-1}\frac{B_{kl}}{(r-l-1)!}\int\limits_{v_{k+1}}^{v_k}K_{r-l}(v_k-v)\varphi^{(r)}(v)dv\right]d\tau\right|\leq$$
$$\leq\frac{2}{r!}\sum_{k=M_0}^{M_1}\frac{1}{v_{k+1}^{\lambda+p}}\int\limits_{v_{k+1}}^{v_k}\left|(v_k-v)^r-\sum_{l=0}^{r-1}\frac{r!B_{kl}(v_k-v_{k+1})(v_k-v)^{r-l-1}}{(r-l-1)!}\right|dv,$$

$$r_3 \le \frac{2}{r!} \sum_{k=M_0}^{M_1} \frac{1}{v_{k+1}^{\lambda+p}} \frac{2((v_k - v_{k+1})/2)^{r+1} R_{r1}(1)}{r+1} = \frac{2}{r! 4^r} \sum_{k=M_0}^{M_1} \frac{(v_k - v_{k+1})^{r+1}}{v_{k+1}^{\lambda+p}} =$$

$$= \frac{2(A^{(\lambda-r-1+p)/(r+1)} - 1)^{r+1}}{r! 4^r N_2^r A^{\lambda-r-1+p}} \left(\frac{r+1}{\lambda - r - 1 + p} \right)^{r+1} =$$

$$= \frac{(1 - A^{(r+1-\lambda-p)/(r+1)})(\lambda - (r+1-p) A^{(r+1-\lambda-p)/(r+1)})^r}{(r+1-p)^r} \times$$

$$\times \frac{1}{2^{2r-1} r! \ N^r} \left(\frac{r+1}{\lambda - r - 1 + p} \right)^{r+1}. \tag{2.13}$$

В качестве функции $\varphi(t) \in W_\rho^r(1)$, обращающейся в нуль в точке A и доставляющей максимум интегралу

$$\int_A^\infty \frac{\varphi(\tau)}{\tau^{p+\lambda}} d\tau,$$

естественно взять функцию $\varphi(\tau) = \frac{1}{r!}(\tau - A)^r$. В результате имеем

$$r_4 = \frac{2}{r!} \int_A^\infty \frac{(\tau - A)^r}{\tau^{\lambda+p}} d\tau = \frac{2D(r,\lambda,p)}{r! A^{\lambda-r-1+p}}. \tag{2.14}$$

Из оценок (2.11) – (2.14) получаем

$$R_N[\Psi] \le (1 + o(1)) \frac{1}{2^{2r-1} r!} \left(\frac{(r+1)(\lambda - (r+1-p) A^{(r+1-p-\lambda)/(r+1)})}{(r+1-p)(\lambda - r - 1 + p)} \right) \frac{1}{N^r}.$$

Сопоставляя эту оценку с оценкой снизу, убеждаемся в справедливости теоремы.

3. Квадратурные формулы для интегралов Адамара с переменной сингулярностью на классах периодических функций

Многочисленные задачи аэродинамики и электродинамики приводят к гиперсингулярным интегральным уравнениям. В работе И. К. Лифанова [56] показано, что решение одной из задач аэродинамики приводит к интегральному уравнению

$$\int_0^{2\pi} \frac{\varphi(\sigma)}{\sin^2 \frac{\sigma - s}{2}} \, d\sigma = f(s). \tag{3.1}$$

В связи с этим обстоятельством представляет интерес построение асимптотически оптимальных квадратурных формул для вычисления интеграла

$$T\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{\varphi(\sigma)}{\sin^p \frac{\sigma-s}{2}}\, d\sigma. \tag{3.2}$$

Отметим, что интеграл $\int\limits_\gamma \dfrac{\varphi(\tau)}{(\tau-t)^p}\, d\tau$, где γ – единичная окружность с центром в начале координат, сводится к интегралу типа (3.2). Сделав замену переменных $\tau = e^{i\sigma}$, $t = e^{is}$, имеем:

$$\int_\gamma \frac{\varphi(\tau)}{(\tau-t)^p}\, d\tau = i\int_0^{2\pi} \frac{e^{i\sigma}\varphi(e^{i\sigma})d\sigma}{(e^{i\sigma}-e^{is})^p} =$$

$$= i\int_0^{2\pi} \frac{e^{i\sigma}\varphi(e^{i\sigma})e^{-ip(\sigma+s)/2}d\sigma}{(e^{i\sigma}-e^{is})^p e^{-ip(\sigma+s)/2}} = i\int_0^{2\pi} \frac{e^{i\sigma}\varphi(e^{i\sigma})e^{-ip(\sigma+s)/2}d\sigma}{(e^{i(\sigma-s)/2}-e^{-i(\sigma-s)/2})^p} =$$

$$= i\int_0^{2\pi} \frac{e^{i\sigma}\varphi(e^{i\sigma})e^{-ip(\sigma+s)/2}d\sigma}{(2i)^p(\sin\frac{\sigma-s}{2})^p} = \frac{e^{-ips/2}i}{(2i)^p}\int_0^{2\pi} \frac{e^{i\sigma}\varphi(e^{i\sigma})e^{-ip\sigma/2}d\sigma}{(\sin\frac{\sigma-s}{2})^p} =$$

$$= \frac{e^{-ips/2}i}{(2i)^p}\int_0^{2\pi} \frac{\psi(\sigma)}{\sin^p\frac{\sigma-s}{2}}\, d\sigma, \tag{3.3}$$

где $\psi(\sigma) = e^{i\sigma}\varphi(e^{i\sigma})e^{-ip\sigma/2}$.

Построим оптимальные по порядку квадратурные формулы для вычисления интеграла (3.2) на классе $W^r(1)$.

Интеграл $T\varphi$ будем вычислять по квадратурным формулам вида

$$T\varphi = \sum_{k=1}^N \varphi(s_k)p_k(s) + R_N(s, s_k, p_k(s), \varphi) \tag{3.4}$$

с произвольными узлами $0 \le s_k \le 2\pi$ и весами $p_k(s)$ $(k = 1, 2, \dots, N)$.

Теорема 3.1. Пусть $\Psi = W^r(1)$ и интеграл $T\varphi$ вычисляется по квадратурным формулам вида (3.4). Тогда

$$\zeta[\Psi] \ge \frac{(4+o(1))K_r\pi^{1-p}}{N^{r+1-p}} \cdot \frac{1}{p-1} \cdot \frac{1}{2^{p-1}}$$

и оптимальной по порядку является квадратурная формула

$$T\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{s_N[\varphi(\sigma)]\, d\sigma}{\sin^p\frac{\sigma-s}{2}} + R_N(\varphi), \tag{3.5}$$

где $s_N[\varphi] \in C^{r-1}$ – интерполяционный сплайн порядка r по равномерному разбиению $v_k = 2k\pi/N$ $(k = 0, 1, \ldots, N)$. Погрешность квадратурной формулы равна $R_N[\Psi] \asymp N^{-(r+1-p)}$.

Здесь K_r – постоянная Фавара

$$K_r = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k(r-1)}}{(2k+1)^{r+1}}.$$

Доказательство. Вычислим оценку снизу погрешности квадратурной формулы вида (3.4) на классе $W^r(1)$ и на произвольном векторе (S, P) узлов и весов. Пусть вектор узлов S имеет вид $S = (s_1, \ldots, s_N)$.

Обозначим через $\varphi^*(\sigma)$ функцию, удовлетворяющую следующим условиям:

1) $\varphi^*(\sigma) \in W^r(1)$;

2) $\min \varphi^*(\sigma) = \varphi^*(s_k) = 0,\ k = 1, 2, \ldots, N$;

3) $\int\limits_0^{2\pi} \varphi^*(\sigma)\, d\sigma = \dfrac{2\pi K_r}{N^r}$.

Как показано в работе [60], такие функции существуют.

Разделим сегмент $[0, 2\pi]$ на N равных частей точками $v_k = 2\pi k/N$, $k = 0, 1, \ldots, N$. Возьмем произвольное v_j $(j = 1, 2, \ldots, N)$ и представим интеграл $(T\varphi^*)(v_j)$ в виде суммы

$$(T\varphi^*)(v_j) = \int\limits_0^{2\pi}\frac{\varphi^*(\sigma)}{\sin^p\frac{\sigma - v_j}{2}}\, d\sigma \geq \sum_{k=1}^{[N/2]-1}\int\limits_{v_{j-k-1}}^{v_{j-k}}\frac{\varphi^*(\sigma)\, d\sigma}{\sin^p\frac{\sigma - v_j}{2}} +$$

$$+\sum_{k=1}^{[N/2]-2}\int\limits_{v_{j+k}}^{v_{j+k+1}}\frac{\varphi^*(\sigma)\, d\sigma}{\sin^p\frac{\sigma - v_j}{2}} \geq \sum_{k=1}^{[N/2]-1}\frac{1}{\sin^p\frac{(k+1)\pi}{N}}\Big(\int\limits_{v_{k+j}}^{v_{k+j+1}}\varphi^*(\sigma)\, d\sigma + \int\limits_{v_{j-k-1}}^{v_{j-k}}\varphi^*(\sigma)\, d\sigma\Big).$$

Поскольку максимальное значение функции $(T\varphi^*)(s)$ не меньше его среднего значения, то

$$\max_s (T\varphi^*)(s) \geq \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}(T\varphi^*)(v_j).$$

Усредним суммы $(T\varphi^*)(v_j)$

$$(T\varphi^*)(s) \geq \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}(T\varphi^*)(v_j) =$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{[N/2]-1}\frac{1}{\sin^p\frac{(k+1)\pi}{N}}\left[\int\limits_{v_{j-k-1}}^{v_{j-k}}\varphi^*(\sigma)\,d\sigma+\int\limits_{v_{k+j}}^{v_{k+j+1}}\varphi^*(\sigma)\,d\sigma\right]=$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{[N/2]-1}\frac{1}{\sin^p\frac{(k+1)\pi}{N}}\sum_{j=1}^{N}\left[\int\limits_{v_{j+k}}^{v_{k+j+1}}\varphi^*(\sigma)\,d\sigma+\int\limits_{v_{j-k-1}}^{v_{j-k}}\varphi^*(\sigma)\,d\sigma\right]=$$

$$= \frac{2}{N}\int\limits_{0}^{2\pi}\varphi^*(\sigma)\,d\sigma\cdot\sum_{k=1}^{[N/2]-1}\frac{1}{\sin^p\frac{(k+1)\pi}{N}}.$$

Оценим сумму

$$B(p)=\sum_{k=1}^{[N/2]-1}\frac{1}{\sin^p\frac{(k+1)\pi}{N}}.$$

Очевидно,

$$\sum_{k=1}^{[N/2]-1}\frac{1}{\sin^p\frac{(k+1)\pi}{N}}\geq\sum_{k=1}^{[N/2]-1}\left(\frac{N}{(k+1)\pi}\right)^p\geq\left(\frac{N}{\pi}\right)^p\frac{1}{p-1}\frac{1}{2^{p-1}}.$$

В итоге получаем

$$\frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N}(T\varphi^*)(v_j)\geq\frac{K_r\pi^{1-p}}{N^{r+1-p}}\frac{1+o(1)}{p-1}\frac{1}{2^{p-3}}.$$

Оценим величину погрешности квадратурной формулы (3.5). Для этого оценим величину $|R_N(\varphi)|$, полагая, что $s\in[s_j,s_{j+1})$:

$$|R_N(\varphi)|=\sup_{\varphi\in W^r(1)}\max_s\left|\int\limits_0^{2\pi}(\varphi(\sigma)-s_N[\varphi(\sigma)])\frac{1}{\sin^p\frac{\sigma-s}{2}}\,d\sigma\right|\leq$$

$$\leq\sum_{k=2}^{[N/2]-1}\left|\int\limits_{s_{k+j}}^{s_{k+j+1}}(\varphi(\sigma)-s_N[\varphi(\sigma)])\frac{1}{\sin^p\frac{\sigma-s}{2}}\,d\sigma+\right.$$

$$\left.+\sum_{k=2}^{[N/2]-1}\right|\int\limits_{s_{j-k-1}}^{s_{j-k}}(\varphi(\sigma)-s_N[\varphi(\sigma)])\frac{1}{\sin^p\frac{\sigma-s}{2}}\,d\sigma\Bigg|+$$

$$+\left|\int\limits_{s_{j-2}}^{s_{j+2}}(\varphi(\sigma)-s_N[\varphi(\sigma)])\frac{1}{\sin^p\frac{\sigma-s}{2}}\,d\sigma\right|=r_1+r_2+r_3.$$

Первые два слагаемых этой суммы оцениваются одинаково. Поэтому оценим только сумму

$$\sum_{k=2}^{[N/2]-1}\left|\int\limits_{s_{k+j}}^{s_{k+j+1}}\frac{\varphi(\sigma)-s_N[\varphi(\sigma)]}{\sin^p\frac{\sigma-s}{2}}\,d\sigma\right|\leq\sum_{k=2}^{[N/2]-1}\left(\frac{K_r}{N^r}\right)\frac{2\pi}{N}\frac{1}{\sin^p\frac{s_{j+k}-s_{j+1}}{2}}=$$

$$= \frac{2\pi}{N}\frac{K_r}{N^r}\sum_{k=2}^{[N/2]-1}\frac{1}{\sin^p\frac{s_{k-1}}{2}} = \frac{2\pi}{N}\frac{K_r}{N^r}\sum_{k=2}^{[N/2]-1}\frac{1}{\sin^p\frac{\pi(k-1)}{N}} \le \frac{2\pi K_r}{N^{r+1}}B(p).$$

В предыдущих выкладках использовались оценки аппроксимации сплайнами, приведенные в следствии к теореме 3.20 в главе 1 первой части книги. Осталось оценить слагаемое r_3. Пусть $h = \min(s - s_{j-2}, s_{j+2} - s)$. Не ограничивая общности, положим, $h = s - s_{j-2}$. Тогда

$$r_3 = \left|\int\limits_{s_{j-2}}^{s_{j+2}}(\varphi(\sigma) - s_N[\varphi(\sigma)])\frac{1}{\sin^p\frac{\sigma-s}{2}}\,d\sigma\right| = \left|\int\limits_{s_{j-2}}^{s_{j+2}}\psi(\sigma)\frac{1}{\sin^p\frac{\sigma-s}{2}}\,d\sigma\right| \le$$

$$\le \left|\int\limits_{s_{j-2}}^{s_{j+h}}\psi(\sigma)\frac{1}{\sin^p\frac{\sigma-s}{2}}\,d\sigma\right| + \left|\int\limits_{s_{j+h}}^{s_{j+2}}\psi(\sigma)\frac{1}{\sin^p\frac{\sigma-s}{2}}\,d\sigma\right| = r_{31} + r_{32},$$

где $\psi(\sigma) = \varphi(\sigma) - s_N(\sigma)$.

Оценим каждое выражение r_{31} и r_{32} в отдельности. Пользуясь определениями сингулярного интеграла, интеграла в смысле Адамара и неравенством А. А. Маркова (часть 1, с. 22), легко получаем, что

$$r_{31} = \left|\int\limits_{s_{j-2}}^{s+h}(\psi(\sigma)-\psi(s)-\frac{1}{1!}\psi'(s)(\sigma-s)-\ldots-\frac{1}{(p-1)!}\psi^{(p-1)}(s)(\sigma-s)^{p-1})\times\right.$$

$$\left.\times\frac{1}{\sin^p\frac{\sigma-s}{2}}\,d\sigma\right| + \sum_{k=0}^{p-1}\left|\int\limits_{s_{j-2}}^{s_j+h}\psi^{(k)}(s)\frac{(\sigma-s)^k}{k!}\frac{1}{\sin^p\frac{\sigma-s}{2}}d\sigma\right| \le$$

$$\le A\int\limits_{s}^{s+h}|\sigma-s|^{r-p}\,d\sigma + \sum_{k=0}^{p-1}\left|\int\limits_{s_{j-2}}^{s_j+h}\psi^{(k)}(s)\frac{(\sigma-s)^k}{k!}\frac{1}{\sin^p\frac{\sigma-s}{2}}d\sigma\right| \le AN^{-r-1+p}.$$

Оценка r_{32} следует из цепочки неравенств:

$$r_{32} \le Ah^{-p+1}\max_{\sigma\in[s_j+h,s_{j+2}]}|\psi(\sigma)| \le AN^{-r}h^{-p+1} \le AN^{-(r+1-p)}.$$

Собирая последние неравенства и сопоставляя их с оценкой снизу, имеем:

$$R_N[\Psi] \asymp N^{(r+1-p)}.$$

Теорема доказана.

Выше было показано (см. формулу (13.3)), что

$$\int\limits_{\gamma} \frac{\varphi(\tau)}{(\tau - t)^p} d\tau = \frac{e^{-ips/2} i}{(2i)^p} \int\limits_0^{2\pi} \frac{\psi(\sigma) d\sigma}{\sin^p \frac{\sigma - s}{2}},$$

где $\psi(\sigma) = e^{i\sigma}\varphi(e^{i\sigma})e^{-ip\sigma/2}$.

Для вычисления интеграла в правой части предыдущего равенства была предложена квадратурная формула (3.5). Эта формула трудно реализуется на практике, что является ее существенным недостатком.

Поэтому для практического вычисления интегралов $\int\limits_{\gamma} \frac{\varphi(\tau)}{(\tau-t)^p} d\tau$ и $\int\limits_0^{2\pi} \frac{\psi(\sigma)d\sigma}{\sin^p \frac{\sigma-s}{2}}$ целесообразно построить квадратурные формулы (возможно и не оптимальные по порядку), легко реализуемые на практике.

Исследование начнем с интеграла

$$C\varphi = \frac{1}{\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{\varphi(\tau)}{(\tau - t)^p} d\tau. \tag{3.6}$$

Сделаем замену переменных $t = e^{is}, \tau = e^{i\sigma}$. Тогда интеграл $C\varphi$ можно представить в виде

$$C\varphi = \frac{1}{\pi i} \int\limits_0^{2\pi} \frac{i\varphi(e^{i\sigma})e^{i\sigma} d\sigma}{(e^{i\sigma} - e^{is})^p} =$$

$$= \frac{1}{\pi i} \int\limits_0^{2\pi} \frac{i\varphi(e^{i\sigma})e^{i\sigma}e^{-ip(\sigma+s)/2}}{(e^{i\sigma} - e^{is})^p e^{-ip(\sigma+s)/2}} =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} \frac{\varphi(e^{i\sigma})e^{ip(\sigma-s)/2}e^{-i(p-1)\sigma}}{(e^{i(\sigma-s)/2} - e^{-i(\sigma-s)/2})^p} =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} \frac{e^{-i(p-1)\sigma}\varphi(e^{i\sigma}) \left(\cos\frac{(\sigma-s)}{2} + i\sin\frac{(\sigma-s)}{2}\right)^p d\sigma}{(2i)^p \sin^p \frac{\sigma-s}{2}} =$$

$$= \frac{1}{(2i)^p \pi} \int\limits_0^{2\pi} e^{-i(p-1)\sigma}\varphi(e^{i\sigma}) \left(\operatorname{ctg}\frac{\sigma - s}{2} + i\right)^p d\sigma. \tag{3.7}$$

Эта формула является распространением формулы Гильберта на гиперсингулярные интегралы.

Нам понадобятся значения интегралов $\frac{1}{\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{\tau^k d\tau}{(\tau-t)^p}$, $k = -n, -n+1, \ldots, -1, 0, 1 \ldots, n$.

Используя определение гиперсингулярного интеграла, имеем:

$$\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{\tau^k d\tau}{(\tau-t)^p}=\frac{1}{\pi i}\frac{k(k-1)\cdots(k-p+2)}{(p-1)!}\int\limits_{\gamma}\frac{\tau^{k-p+1}}{\tau-t}d\tau=$$

$$=\frac{k(k-1)\cdots(k-p+2)}{(p-1)!}t^{k-p+1} \qquad (3.8)$$

при $k\geq p-1$,

$$\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{\tau^k d\tau}{(\tau-t)^p}=0 \qquad (3.9)$$

при $0\leq k\leq p-2$,

$$\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{\tau^k d\tau}{(\tau-t)^p}=\frac{1}{\pi i}(-1)^{p-1}\frac{k(k+1)\cdots(k+p-1)}{(p-1)!}\int\limits_{\gamma}\frac{\tau^{-k-p+1}d\tau}{(\tau-t)}=$$

$$=(-1)^p\frac{k(k+1)\cdots(k+p-1)}{(p-1)!}t^{-k-p+1} \qquad (3.10)$$

при $-\infty<k<0$.

Приведенные выше формулы позволяют строить эффективные квадратурные формулы для вычисления гиперсингулярных интегралов.

Пусть функция $\varphi(t)\in W^rH_\alpha(1)$ и $r\geq p-1,\ 0<\alpha\leq 1$.

Разложим функцию $\varphi(t)$ в ряд Лорана по базисным функциям t^k, $k=\ldots,-n,-n+1,\ldots,-1,0,1,\ldots,n\ldots$. Нетрудно видеть, что для функций, принадлежащих множеству $W^rH_\alpha(1)$, ряд по базисным функциям t^k сходится и, кроме того, справедлива в метрике пространства C следующая оценка

$$\|\varphi(t)-\varphi_N(t)\|_C\leq AN^{-r-\alpha},$$

где

$$\varphi_N(t)=\sum_{k=-N}^{N}\varphi_k t^k,\quad \varphi_k=\frac{1}{2\pi i}\int\frac{\varphi(t)dt}{t^{k+1}}.$$

Рассмотрим квадратурную формулу

$$C\varphi=C\varphi_N(t)+R_N(\varphi)=\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{\varphi_N(t)dt}{(\tau-t)^p}+R_N(\varphi).$$

Оценим погрешность этой квадратурной формулы. Очевидно,

$$|R_N(\varphi)| \leq \frac{1}{\pi}\left|\int\limits_\gamma \frac{\varphi(\tau)-\varphi_N(\tau)}{(\tau-t)^p}d\tau\right| =$$

$$= \frac{1}{\pi(p-1)!}\left|\int\limits_\gamma \frac{(\varphi(\tau)-\varphi_N(\tau))^{p-1}}{\tau-t}d\tau\right|.$$

Так как $|\varphi(\tau)-\varphi_N(\tau)| \leq AN^{-r-\alpha}$, то $|(\varphi(\tau)-\varphi_N(\tau)^{(k)}| \leq AN^{-r-\alpha+k}$, $k = 0, 1, \ldots, r$.

Из последней оценки и обратных теорем Бернштейна [63] следует, что $(\varphi(\tau)-\varphi_N(\tau))^{(k)} \in W^{r-k}H_\alpha$ при $k = 0, 1, \ldots, r$.

Из результатов [52] следует, что

$$\left|\int\limits_\gamma \frac{(\varphi(\tau)-\varphi_N(\tau))^{p-1}}{\tau-t}d\tau\right| \leq AN^{-r+p-1-\alpha}\ln N.$$

Рассмотрим теперь квадратурную формулу интерполяционного вида.

Пусть $\varphi(t) \in W^r H_\alpha(1)$. В монографии [52] построен интерполяционный полином

$$u_N(\varphi,t) = \sum_{k=-N}^{N} \alpha_k t^k,\ \alpha_k = \frac{1}{2N+1}\sum_{j=-N}^{N}\varphi(\tau_j)\tau_j^{-k},$$

$\tau_j = e^{2\pi i j/(2n+1)}$.

Там же показано, что полином $u_N(\varphi,t)$ представим в виде

$$u_N(\varphi,t) = \frac{1}{2N+1}\sum_{j=-n}^{n}\varphi(\tau_j)\left(\frac{t}{\tau_j}\right)^{-N}\frac{1-(t/\tau_j)^{2N+1}}{1-t/\tau_j}, \tag{3.11}$$

и получена оценка

$$|\varphi(t)-u_N(\varphi,t)| \leq \left(1+\frac{4}{\pi}+\frac{2}{\pi}\ln\frac{2}{\pi}(2N+1)\right] E_N(\varphi,\gamma), \tag{3.12}$$

где $E_N(\varphi,\gamma)-$ наилучшее приближение функции $\varphi(t)$ полиномами вида $\sum_{-N}^{N}\alpha_k t^k$ на контуре γ.

Воспользовавшись интерполяционным полиномом $u_N(\varphi,t)$, построим квадратурную формулу

$$C\varphi = Cu_N(\varphi,t) + R_N(\varphi) = \frac{1}{\pi i}\int\limits_\gamma \frac{u_N(\varphi,\tau)d\tau}{(\tau-t)^p} + R_N(\varphi). \tag{3.13}$$

Квадратурная формула (3.13) легко может быть представлена в явном виде, если в (3.13) подставить (3.11) и применить формулы (3.8) $-$ (3.10).

Не останавливаясь на этом, оценим погрешность квадратурной формулы (3.13).

Для исследования численных методов решения сингулярных интегральных уравнений В. В. Иванов [52] ввел пространство $W(L)$, где $L-$ замкнутый гладкий контур.

Пусть функция $\varphi(t),\ t \in L$, и контур L удовлетворяют условиям, при которых справедливы формулы Племеля $-$ Сохоцкого:

$$\varphi(t) = \varphi^+(t) - \varphi^-(t), \quad S\varphi = \varphi^+(t) + \varphi^-(t),$$

где $\varphi^+(t)$ и $\varphi^-(t)-$ граничные значения интеграла типа Коши $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}d\tau$ соответственно слева и справа от контура L при его обходе в положительном направлении (против часовой стрелки).

Через $W(L)$ обозначается линейное нормированное пространство функций $\varphi(t)$, для которых $\varphi^+(t)$ и $\varphi^-(t)$ непрерывны. Норма $W(L)$ вводится формулой

$$||\varphi||_{W(L)} = \max_{t\in L}|\varphi^+(t)| + \max_{t\in L}|\varphi^-(t)|.$$

В [52] показано, что если $L-$ простой замкнутый контур, то $W(L)-$ банахово пространство и

$$||S\varphi||_{W(L)} = ||\varphi||_{W(L)}, \quad S\varphi = \frac{1}{\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}d\tau. \tag{3.14}$$

Очевидно,

$$|R_N(\varphi)| \leq \frac{1}{\pi}\left|\int\limits_\gamma \frac{(\varphi(\tau) - u_N(\varphi,\tau))d\tau}{(\tau - t)^p}\right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{\pi(p-1)!}\left|\int\limits_\gamma \frac{(\varphi(\tau) - u_N(\varphi,\tau))^{p-1}d\tau}{\tau - t}\right|. \tag{3.15}$$

Из неравенства (3.12) следует, что на классе функций $W^rH_\alpha(1)$ справедлива оценка $||\varphi(\tau) - u_N(\varphi,\tau)||_{C(\gamma)} \leq AN^{-r-\alpha}\ln N$.

В [52] получены оценки

$$||\varphi(\tau) - u_N(\varphi,\tau)||_{W(\gamma)} \leq \left(2 + \frac{4}{\pi} + \frac{4}{\pi}\ln\frac{2}{\pi}(2N+1)\right)E_N(\varphi,\gamma),$$

$$||\varphi^+(\tau) - u_N^+(\varphi,\tau)||_{C(\gamma)} \le \left(2 + \frac{4}{\pi} + \frac{4}{\pi}\ln\frac{2}{\pi}(2N+1)\right) E_N(\varphi,\gamma),$$

$$||\varphi^-(\tau) - u_N^-(\varphi,\tau)||_{C(\gamma)} \le \left(2 + \frac{4}{\pi} + \frac{4}{\pi}\ln\frac{2}{\pi}(2N+1)\right) E_N(\varphi,\gamma).$$

Используя метод доказательства обратных теорем конструктивной теории функции [63], можно показать, что

$$||(\varphi^+(\tau) - u_N^+(\varphi,\tau))^{(v)}||_{C(\gamma)} \le AN^v E_N(\varphi,\gamma)\ln N, \qquad (3.16)$$

$$||(\varphi^-(\tau) - u_N^-(\varphi,\tau))^{(v)}||_{C(\gamma)} \le AN^v E_N(\varphi,\gamma)\ln N, \qquad (3.17).$$

Тогда из неравенств $(3.14) - (3.17)$ следует оценка

$$|R_N(\varphi)| \le AN^{p-1}E_N(\varphi,\gamma)\ln N.$$

Так как функция $\varphi \in W^r H_\alpha(1),\ r \ge p-1$, то окончательно имеем

$$|R_N(\varphi)| \le AN^{-r+p-1}\ln N.$$

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема 3.2. Пусть $\Psi-$ множество функций $\varphi(t)$, удовлетворяющих условию $E_N(\varphi,\gamma) \le AN^{-q}$, где $q > p-1$. Погрешность квадратурной формулы (3.13) оценивается неравенством

$$R_N(\Psi) \le N^{p-1}E_N(\varphi,\gamma)\ln N.$$

4. Приближенные методы вычисления интегралов Адамара на конечных сегментах

В этом параграфе построим оптимальную по порядку квадратурную формулу для вычисления интегралов вида

$$K\varphi = \int\limits_{-1}^{1} \frac{\varphi(\tau)}{(\tau-t)^p}d\tau, \quad -1 < t < 1, \qquad (4.1)$$

$p-$ целое число, $p = 2, 3, \ldots$.

Будем вычислять интеграл (4.1) по квадратурным формулам вида

$$K\varphi = \sum_{k=1}^{N}\sum_{l=0}^{\rho} p_{kl}(t)\varphi^{(l)}(t_k) + R_N(t, p_{kl}, t_k, \varphi), \qquad (4.2)$$

где $\{t_k\}-$ набор узлов, расположенных на сегменте $[-1, 1]$.

Теорема 4.1. Пусть $\varphi \in \Psi = W^r(1)$. Для квадратурных формул вида (4.2) при $0 \le \rho \le r-1$ справедлива оценка $\zeta_N[\Psi] \ge AN^{-r-1+p}$.

Доказательство. Введем узлы $v_k = -1 + k/N$, $k = 0, 1, \ldots, 2N$, и покроем сегмент $[-1, 1]$ более мелкими сегментами $\Delta_k = [v_k, v_{k+1}]$, $k = 0, 1, \ldots, 2N$. Так как квадратурная формула (4.2) имеет N узлов, то имеется, по крайней мере, N сегментов Δ_k, внутри которых нет узлов квадратурной формулы (4.2). Назовем эти сегменты отмеченными. Как и в первой части книги ([14], с. 169) обозначим через $\Theta(k, l)$ отношение числа отмеченных сегментов $\Delta_k, \Delta_{k+1}, \ldots, \Delta_l$ к общему числу сегментов $l-k$, $k = 0, 1, \ldots, 2N-l$, $l = k+1, \ldots, 2N-l$. В первой части книги ([14], с. 169) было показано, что существует такое число $\bar{k}$, $\bar{k} < 3(N+1)/2$, для которого $\min\limits_{l>k} \Theta(\bar{k}, l) \ge 1/3$.

Введем функцию $\varphi^*(t)$, равную нулю на всех сегментах Δ_k при $k < \bar{k}$ и равную нулю на всех неотмеченных сегментах. На отмеченных сегментах Δ_j, $j \ge \bar{k}$ положим $\varphi^*(t) = A((t-t_j)(t_{j+1}-t))^r/N^r$, где константа A подбирается из требования, чтобы $\varphi^*(t) \in W^r(1)$. Очевидно, такая константа существует и не зависит от j.

Тогда

$$\sup_{\varphi(t) \in W^r(1)} \max_t \int_{-1}^{1} \frac{\varphi(\tau)}{(\tau - t)^p} d\tau \ge \int_{-1}^{1} \frac{\varphi^*(\tau)}{(\tau - t_{\bar{k}})^p} d\tau \ge AN^{-(r+1-p)}.$$

Теорема доказана.

Построим несколько оптимальных по порядку квадратурных формул для вычисления интеграла $K\varphi$.

Введем узлы $v_k = -1 + 2k/N$, $k = 0, 1, \ldots, N$. Покроем сегмент $[-1, 1]$ более мелкими сегментами $\Delta_k = [v_k, v_{k+1}]$, $k = 0, 1, \ldots, N-1$. В каждом сегменте Δ_k построим интерполяционный полином Эрмита по узлам $t_1^k, t_2^k, \ldots, t_m^k$, где $t_1^k = v_k$, $t_m^k = v_{k+1}$, а число m определим как наименьшее целое число, удовлетворяющее неравенству $mp \ge r$. Узлы t_j^k, $j = 1, 2, \ldots, m$, могут быть как равноотстоящими, так и образами узлов ортогональных многочленов при отображении сегмента $[-1, 1]$ на сегмент Δ_k. На сегменте Δ_k построим интерполяционный полином Эрмита, равный в каждом из этих узлов значениям функции $\varphi(t)$ и ее производных до p-го порядка включительно. Построенный на сегменте Δ_k эрмитов полином обозначим как $H_p(\tau, \Delta_k)$, $k = 0, 1, \ldots, N-1$. (Отметим, что при $p = 2$ полином Эрмита построен в явном виде в монографии [63]).

Интеграл (4.1) будем вычислять по квадратурной формуле

$$K\varphi = \sum_{k=0}^{N-1} \int\limits_{\Delta_k} P_r \left[\frac{H_p(\tau, \Delta_k) - T_p(H_p(\tau, \Delta_k), t)}{(\tau - t)^p}; \Delta_k \right] d\tau +$$

$$+ \int\limits_{\Delta_k} \left[\frac{T_p(H_p(\tau, \Delta_k), t)}{(\tau - t)^p} \right] d\tau + R_N(\varphi). \qquad (4.3)$$

Здесь через T_p и P_r обозначены отрезки ряда Тейлора и операторы проектирования, введенные в разделе 2.

Теорема 4.2. Пусть $\Psi = W^r(1)$. Среди всевозможных квадратурных формул вида (4.2) оптимальной по порядку является формула (4.3). Ее погрешность равна $R_N[\Psi] \asymp N^{-r-1+p}$.

Доказательство. Прежде всего нужно оценить разность

$$r_1 = \sum_{k=0}^{N-1} \left| \int\limits_{\Delta_k} \frac{\varphi(\tau) - H_p(\tau, \Delta_k)}{(\tau - t)^p} d\tau \right|.$$

Пусть $t \in \Delta_j$, $j = 0, 1, \ldots, N-1$, $t \in (-1, 1)$.

Представим сумму r_1 в виде

$$r_1 = \sum_{k=0}^{j-2} \left| \int\limits_{\Delta_k} \frac{\psi(\tau, \Delta_k)}{(\tau - t)^p} d\tau \right| + \left| \int\limits_{\Delta_{j-1}} \frac{\psi(\tau, \Delta_{j-1})}{(\tau - t)^p} d\tau \right| + \left| \int\limits_{\Delta_j} \frac{\psi(\tau, \Delta_j)}{(\tau - t)^p} d\tau \right| +$$

$$+ \left| \int\limits_{\Delta_{j+1}} \frac{\psi(\tau, \Delta_{j+1})}{(\tau - t)^p} d\tau \right| + \sum_{k=j+2}^{N-1} \left| \int\limits_{\Delta_k} \frac{\psi(\tau, \Delta_k)}{(\tau - t)^p} d\tau \right| = r_{11} + \cdots + r_{15}, \qquad (4.4)$$

где $\psi(\tau, \Delta_k) = \varphi(\tau) - H_p(\varphi, \Delta_k)$.

Оценим каждое из выражений $r_{11} - r_{15}$ в отдельности.

Нетрудно видеть, что

$$r_{11} \le \sum_{k=0}^{j-2} \left(\frac{N}{k-j} \right)^p \int\limits_{\Delta_k} |\psi(\tau, \Delta_k)| \le A \frac{1}{N^{r+1-p}}. \qquad (4.5)$$

Аналогичная оценка имеет место и для r_{15} :

$$r_{15} \le A \frac{1}{N^{r+1-p}}. \qquad (4.6)$$

Оценим интеграл r_{12}. Очевидно,

$$r_{12} = \left| \int\limits_{\Delta_{j-1}} \frac{\psi(\tau, \Delta_{j-1})}{(\tau - t)^p} d\tau \right| \leq \int\limits_{\Delta_{j-1}} \frac{|\psi(\tau, \Delta_{j-1})|}{|\tau - t|^p} d\tau.$$

Так как функция $\psi(\tau, \Delta_{j-1})$ обращается в нуль вместе с производными до p-го порядка включительно в точке v_j, то, воспользовавшись формулой Тейлора для разложения функции $\psi(\tau, \Delta_{j-1})$ по степеням $(\tau - \tau_j)$ до p-го порядка, имеем:

$$|\psi(\tau, \Delta_{j-1})| \leq \frac{|\psi^{(p+1)}(\zeta, \Delta_{j-1})|}{(p+1)!} (\tau - v_j)^{p+1}, \quad v_{j-1} < \zeta < v_j.$$

Так как $\|\psi(\tau, \Delta_{j-1})\|_C \leq Ah^r = AN^{-r}$, воспользовавшись неравенством А. А. Маркова (теорема 3.8 из главы 1 первой части книги), имеем

$$|\psi^{(p+1)}(\zeta, \Delta_{j-1})| \leq AN^{-r+p+1}.$$

Следовательно,

$$\int\limits_{\Delta_{j-1}} \frac{|\psi(\tau, \Delta_{j+1}|}{|\tau - t_j|^p} d\tau \leq \frac{A}{N^{r-p-1}} \int\limits_{\Delta_{j-1}} |\tau - t_j| d\tau \leq \frac{A}{N^{r-p+1}}$$

и

$$r_{12} \leq AN^{-(r+1-p)}. \tag{4.7}$$

Аналогичная оценка справедлива и для r_{14} :

$$r_{14} \leq AN^{-r-1+p}. \tag{4.8}$$

Приступим к оценке r_{13}. Пусть точка t расположена между узлами t_j^i и t_j^{i+1}. Тогда

$$r_{13} \leq \left| \int\limits_{v_j}^{t_j^i} \frac{\psi(\tau, \Delta_j)}{(\tau - t)^p} d\tau \right| + \left| \int\limits_{t_j^i}^{t_j^{i+1}} \frac{\psi(\tau, \Delta_j)}{(\tau - t)^p} d\tau \right| +$$

$$+ \left| \int\limits_{t_j^{i+1}}^{v_{j+1}} \frac{\psi(\tau, \Delta_j)}{(\tau - t)^p} d\tau \right| = r_{131} + r_{132} + r_{133}. \tag{4.9}$$

Оценим каждое слагаемое в отдельности.

Для оценки r_{131} заметим, что в интеграле $r_{131} \leq \int\limits_{v_j}^{t_j^i} \frac{|\psi(\tau,\Delta_j)|}{|\tau - t_j^i|^p} d\tau$ и числитель и знаменатель имеют в точке t_j^i нули p-го порядка.

Повторяя рассуждения, проведенные выше при оценке r_{12}, имеем:

$$r_{131} \leq AN^{-r-1+p}. \tag{4.10}$$

Аналогичная оценка справедлива и для r_{133} :

$$r_{133} \leq AN^{-r-1+p}. \tag{4.11}$$

Приступим к оценке интеграла r_{132}. Воспользовавшись определением интеграла Адамара, имеем:

$$r_{132} = \frac{1}{p!} \left| \int\limits_{t_j^i}^{t_j^{i+1}} \psi^{(p)}(\tau, \Delta_j) d\tau \right| \leq AN^{-r-1+p}. \tag{4.12}$$

Собирая оценки (4.4) — (4.12), имеем:

$$r_1 \leq AN^{-r-1+p}. \tag{4.13}$$

Осталось оценить разность

$$r_2 = \left| \sum_{k=0}^{N-1} \int\limits_{\Delta_k} \left\{ \frac{H_p(\tau,\Delta_k) - T_p(H_p(\tau,\Delta_k),t)}{(\tau-t)^p} - \right.\right.$$

$$\left.\left. -P_r \left[\frac{H_p(\tau,\Delta_k) - T_p(H_p(\tau,\Delta_k),t)}{(\tau-t)^p}; \Delta_k \right] \right\} d\tau \right|.$$

Так как выражение

$$\frac{H_p(\tau,\Delta_k) - T_p(H_p(\tau,\Delta_k),t)}{(\tau-t)^p}$$

является полином степени не выше $2r-1$, а оператор P_r определяет квадратурную формулу Гаусса, то $r_2 \equiv 0$.

Отсюда и из (4.13) следует оценка

$$R_N[\Psi] \leq AN^{-r-1+p}. \tag{4.14}$$

Сопоставляя эту оценку с утверждением теоремы 4.1, завершаем доказательство теоремы.

Построим оптимальную по порядку квадратурную формулу, удобную для практического применения.

Введем узлы $t_k = -1 + 2k/N$, $k = 0, 1, \ldots, N$. Покроем сегмент $[-1, 1]$ более мелкими сегментами $\Delta_k = [t_k, t_{k+1}]$, $k = 0, 1, \ldots, N-1$. Обозначим через $t_0^k, t_1^k, \ldots, t_r^k$ узлы $t_j^k = t_k + 2j/(rN)$, $j = 0, 1, \ldots, r$, $k = 0, 1, \ldots, N-1$. Через $\varphi_r(t, \Delta_k)$ обозначим полином степени r, интерполирующий функцию $\varphi(t)$ на сегменте Δ_k по узлам $t_0^k, t_1^k, \ldots, t_r^k$. Через $\varphi_{2r}(t, \Delta_k \cup \Delta_{k+1})$ обозначим полином степени $2r$, интерполирующий функцию $\varphi(t)$ на сегменте $\Delta_k \cup \Delta_{k+1}$ по узлам $t_0^k, t_1^k, \ldots, t_r^k, t_1^{k+1}, \ldots, t_r^{k+1}$. Обозначим через $\zeta_1, \ldots, \zeta_r$ узлы полинома Лежандра степени r, расположенные на сегменте $[-1, 1]$. Через $\zeta_1^k, \ldots, \zeta_r^k$ обозначим образы узлов $\zeta_1, \ldots, \zeta_r$, при линейном отображении сегмента $[-1, 1]$ на сегмент Δ_k, $k = 0, 1, \ldots, N-1$. Обозначим через $P_r(\varphi, \Delta_k)$ оператор, проектирующий функцию $\varphi \in C(\Delta_k)$ на интерполяционный полином степени $r-1$ по узлам ζ_j^k, $j = 1, 2, \ldots, r$, $k = 0, 1, \ldots, N-1$.

Обозначим через $T_r(\varphi, \Delta_k, c)$ отрезок ряда Тейлора разложения функции φ по степеням $(t-c)$ до r-го порядка, определенный на сегменте Δ_k. Отметим, что точка c не обязана принадлежать сегменту Δ_k, $k = 0, 1, \ldots, N-1$.

Пусть особая точка $t \in [v_j, v'_{N-1}]$ и, кроме того, пусть $t \in [v_j, v'_j]$, $j = 1, 2, \ldots, N-1$. Остальные случаи рассматриваются аналогично. Здесь $v'_j = (v_j + v_{j+1})/2$, $j = 0, 1, \ldots, N-1$. Интеграл (4.1) будем вычислять по квадратурной формуле

$$K\varphi = \sum_{k=0}^{N-1}{}' \int\limits_{\Delta_k} P_r\left[\frac{\varphi_r(\tau, \Delta_k) - T_p(\varphi_r(\tau, \Delta_k), \Delta_k, t)}{(\tau - t)^p}; \Delta_k\right] d\tau +$$

$$+ \sum_{k=0}^{N-1}{}' \int\limits_{\Delta_k} \frac{T_p(\varphi_r(\tau, \Delta_k), \Delta_k, t)}{(\tau - t)^p} d\tau +$$

$$+ \int\limits_{\Delta_{j-1}} P_r\left[\frac{\varphi_{2r}(\tau, \Delta_{j-1} \cup \Delta_j) - T_p(\varphi_{2r}(\tau, \Delta_{j-1} \cup \Delta_j), \Delta_{j-1}, t)}{(\tau - t)^p}; \Delta_{j-1}\right] d\tau +$$

$$+ \int\limits_{\Delta_j} P_r\left[\frac{\varphi_{2r}(\tau, \Delta_{j-1} \cup \Delta_j) - T_p(\varphi_{2r}(\tau, \Delta_{j-1} \cup \Delta_j), \Delta_j, t)}{(\tau - t)^p}; \Delta_j\right] d\tau +$$

$$+ \int\limits_{\Delta_{j-1}} \frac{T_p(\varphi_{2r}(\tau, \Delta_{j-1} \cup \Delta_j), \Delta_{j-1}, t)}{(\tau - t)^p} d\tau +$$

$$+\int\limits_{\Delta_j}\frac{T_p(\varphi_{2r}(\tau,\Delta_{j-1}\cup\Delta_j),\Delta_j,t)}{(\tau-t)^p}d\tau+R_N(\varphi),\tag{4.15}$$

где $\sum'$ означает суммирование по $k\neq j-1,j$.

Замечания.

1. Интеграл

$$\int\limits_{\Delta_j}P_r\left[\frac{\varphi_r(\tau,\Delta_j)-T_r(\varphi_r(\tau,\Delta_j),\Delta_j,t)}{(\tau-t)^p};\Delta_j\right]d\tau$$

равен нулю.

2. Так как интеграл (4.1) вычисляется в точках t, пробегающих промежуток $(-1,1)$, то вместо формулы (4.15) иногда бывает удобным использовать формулу

$$K\varphi=\sum_{k=0}^{N-1}{}'\int\limits_{\Delta_k}\frac{T_r(\varphi_r(\tau,\Delta_k),\Delta_k,t)}{(\tau-t)^p}d\tau+$$

$$+\int\limits_{\Delta_{j-1}}\frac{T_r(\varphi_{2r}(\tau,\Delta_{j-1}\cup\Delta_j),\Delta_{j-1},t)}{(\tau-t)^p}d\tau+$$

$$+\int\limits_{\Delta_j}\frac{T_r(\varphi_{2r}(\tau,\Delta_{j-1}\cup\Delta_j),\Delta_j,t)}{(\tau-t)^p}d\tau+R_N(\varphi).\tag{4.16}$$

Теорема 4.3. Пусть $\varphi\in\Psi=W^r(1)$, $t\in[v_j,v_{j+1}]$, $j=1,2,\ldots,N-2$. Среди всевозможных квадратурных формул вида (4.2) оптимальными по порядку являются формулы (4.15) и (4.16). Их погрешность равна

$$R_N[\Psi]\asymp N^{-(r+1-p)}.$$

Доказательство. Доказательство теоремы проведем только для квадратурной формулы (4.15). Из замечания 1 следует, что они эквивалентны. Оценка снизу функционала $\zeta_N[\Psi]$ приведена в теореме 4.1. Поэтому ограничимся оценкой сверху погрешности $R_N[\Psi]$. Для этого, полагая, что $t\in\Delta_j$, представим $|R_N(\varphi)|$ следующим образом:

$$|R_N(\varphi)|\leq\sum_{k=0}^{N-1}{}'\left|\int\limits_{\Delta_k}\frac{\varphi(\tau)-\varphi_r(\tau,\Delta_k)}{(\tau-t)^p}d\tau\right|+$$

$$+\sum_{k=0}^{N-1}{}'\left|\int\limits_{\Delta_k}R_r\left[\frac{\varphi_r(\tau,\Delta_k)-T_p(\varphi_r(\tau,\Delta_k),\Delta_k,t)}{(\tau-t)^p};\Delta_k\right]d\tau\right|+$$

$$+\left|\int\limits_{\Delta_{j-1}\cup\Delta_j}\frac{\varphi(\tau)-\varphi_{2r}(\tau,\Delta_{j-1}\cup\Delta_j)}{(\tau-t)^p}d\tau\right|+$$

$$+\left|\int\limits_{\Delta_{j-1}}R_r\left[\frac{\varphi_{2r}(\tau,\Delta_{j-1}\cup\Delta_j)-T_p(\varphi_{2r}(\tau,\Delta_{j-1}\cup\Delta_j),\Delta_{j-1},t)}{(\tau-t)^p};\Delta_{j-1}\right]d\tau\right|+$$

$$+\left|\int\limits_{\Delta_j}R_r\left[\frac{\varphi_{2r}(\tau,\Delta_{j-1}\cup\Delta_j)-T_p(\varphi_{2r}(\tau,\Delta_{j-1}\cup\Delta_j),\Delta_j,t)}{(\tau-t)^p};\Delta_j\right]d\tau\right|=$$

$$=r_1+\cdots+r_5, \tag{4.17}$$

где $\sum'$ означает суммирование по $k\neq j-1,j$, $R_r=E-P_r$, $E-$ тождественный оператор.

Оценим каждое из выражений, входящих в (4.17) в отдельности.

Прежде всего оценим r_1 :

$$r_1\leq\left|\sum_{k=0}^{j-2}\int\limits_{\Delta_k}\frac{\psi(\tau,\Delta_k)}{(\tau-t)^p}d\tau\right|+$$

$$+\left|\sum_{k=j+1}^{N-1}\int\limits_{\Delta_k}\frac{\psi(\tau,\Delta_k)}{(\tau-t)^p}d\tau\right|=r_{11}+r_{12}, \tag{4.18}$$

где $\psi(\tau,\Delta_k)=\varphi(\tau)-\varphi_r(\tau,\Delta_k)$, $k=0,1,\ldots,N-1$.

Нетрудно видеть, что

$$r_{11}+r_{12}\leq AN^{-r-1+p}. \tag{4.19}$$

Из определения выражений r_2, r_4, r_5 следует, что

$$r_2=r_4=r_5=0. \tag{4.20}$$

Осталось оценить интеграл r_3. Воспользовавшись определением интеграла Адамара, имеем:

$$r_3\leq AN^{-r-1+p}. \tag{4.21}$$

Собирая оценки (4.17) – (4.21), приходим к неравенству: $|R_N(\varphi)|\leq$ $\leq BN^{-(r+1-p)}$. Так как эта оценка получена для произвольной функции $\varphi\in W^r(1)$, то тем самым доказана справедливость неравенства $R_N[W^r(1)]\leq BN^{-(r+1-p)}$.

Сопоставляя эту оценку с утверждением теоремы 4.1, завершаем доказательство теоремы.

5. Интегралы Адамара с переменной сингулярностью на бесконечном интервале

В данном параграфе построены оптимальные по порядку по точности алгоритмы вычисления интегралов

$$K\varphi = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{|\tau - t|^{p+\lambda}}; \quad p = 1, 2, \ldots;\ 0 < \lambda < 1, \tag{5.1}$$

$$F\varphi = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{(\tau - t)^{p}}, \quad p = 2, 3, \ldots. \tag{5.2}$$

При этом часть приведенных ниже результатов ранее была опубликована в [24], [26].

Будем вычислять интегралы (5.1) и (5.2) в предположении, что $\varphi(t) = \rho(t)\psi(t)$, где $\rho(t)$ – весовая функция. В качестве весовых функций используются функции $\rho_1(t) = a^{-|t|}$, $\quad \rho_2(t) = e^{-t^2}$, $\quad \rho_3(t) = 1/(1+t^2)^{\alpha}$.

Будем считать, что $\varphi(t) \in W^r_{\rho_i}(1)$, если $\varphi(t) = \rho_i(t)\psi(t)$, где $\psi(t) \in W^r(1)$. При этом сделаем предположение, что все производные функции $\psi(t)$ до $(r-1)$-го порядка включительно ограничены одной и той же постоянной, по модулю меньшей или равной единице.

Вычисление интегралов (5.1) и (5.2) будем проводить по формулам

$$K\varphi = \sum_{k=1}^{2N} \sum_{l=0}^{s} p_{kl}(t)\varphi^{(l)}(t_k) + R_N(t, t_k, p_{kl}, \varphi); \tag{5.3}$$

$$F\varphi = \sum_{k=1}^{2N} \sum_{l=0}^{s} p_{kl}(t)\varphi^{(l)}(t_k) + R_N(t, t_k, p_{kl}, \varphi). \tag{5.4}$$

Теорема 5.1. Пусть $\Psi = W^r_{\rho_i}(1)$, $i = 1, 2, 3$, интеграл $K\varphi$ вычисляется по квадратурной формуле вида (5.3) при $s = 0$. Тогда

$$\zeta_N[\Psi] \geq \frac{C}{N^{r+1-p-\lambda}},$$

где C – постоянная, не зависящая от N.

Теорема 5.2. Пусть $\Psi = W^r_{\rho_i}(1)$, $i = 1, 2, 3$, интеграл $F\varphi$ вычисляется по квадратурной формуле вида (5.4) при $s = 0$. Тогда $\zeta_N[\Psi] \geq CN^{-(r+1-p)}$, где C – постоянная, не зависящая от N.

Теорема 5.3. Пусть $\Psi = W^r_{\rho_i}(1)$, $i = 1, 2, 3$, интеграл $K\varphi$ вычисляется по квадратурной формуле вида (5.3). Тогда $\zeta_N[\Psi] \geq CN^{-(r+1-p-\lambda)}$, где C – постоянная, не зависящая от N.

Теорема 5.4. Пусть $\Psi = W^r_{\rho_1}(1)$, $i = 1, 2, 3$, интеграл $F\varphi$ вычисляется по квадратурной формуле вида (5.4). Тогда

$$\zeta_N[\Psi] \geq \frac{C}{N^{r+1-p}},$$

где C – постоянная, не зависящая от N.

Построим квадратурную формулу для вычисления интеграла $K\varphi$ на классе $W^r_{\rho_i}(1)$ $(i = 1, 2, 3)$. Введем обозначения: $A_1 = [(r-p+1)\ln N]$; $A_2 = [(r\ln N)^{1/2}]$; $\quad A_3 = [(N^2/\ln N)^{1/(2\alpha-1)}]$;
$t^1_k = k;\quad k = -A_1, \dots, -1, 0, 1, \dots, A_1 - 1;$
$t^2_k = k;\quad k = -A_2, \dots, -1, 0, 1, \dots, A_2 - 1;$
$t^3_k = k;\quad k = -A_3, \dots, -1, 0, 1, \dots, A_3 - 1;$
$n^1_k = [N/a^{|k|/r}],\quad k = -A_1, \dots, A_1 - 1;$
$n^2_k = [N/\exp(k^2/r)],\quad k = -A_2, \dots, A_2 - 1;$
$n^3_k = [N/|k|^{2\alpha-1/2}],\quad k = -A_3, \dots, -1, 1, \dots, A_3 - 1$; при $k = 0$ $n^3_0 = N$.

Интеграл $K\varphi$ будем вычислять по квадратурной формуле

$$K\varphi = \sum_{k=-A_i}^{A_i-1} \int\limits_{t^{(i)}_k}^{t^{(i)}_{k+1}} \frac{T_{n^i_k}(\varphi_{n^i_k}(\tau), t)}{|\tau - t|^{p+\lambda}} d\tau + R^i_N(\varphi), \tag{5.5}$$

где $\varphi_N(\tau) = P_{n_k}[\tau]$ при $\tau \in [t_k, t_{k+1}]$, $k = -A_i, \dots, A_i - 1$, $P_n[\varphi]$ – оператор проектирования на множество интерполяционных полиномов степени n по узлам полиномов Чебышева первого рода степени $n+1$.

Теорема 5.5. Погрешность квадратурных формул вида (5.5), предназначенных для вычисления интеграла Адамара (5.1) при $\varphi(0) = 0$, $s = 0$, на классе $\Psi = W^r_{\rho_i}(1)$, $i = 1, 2, 3$, равна $R_N[\Psi] = AN^{-r+p+\lambda}\ln N$.

Пусть $t \in [t^i_j, t^i_{j+1}]$. Рассмотрим квадратурную формулу

$$F(\rho_i\psi) = {\sum_{k=-A_i}^{A_i-1}}' \int\limits_{t^{(i)}_k}^{t^{(i)}_{k+1}} \frac{T_{n_k}(\varphi_N(\tau, \Delta_k), t)}{(\tau - t)^p} d\tau +$$

$$+ \int\limits_{t^i_{j-1}}^{t^i_{j+2}} \frac{T_{n_{j-1}+n_j+n_{j+1}}(\varphi_N(\tau, \Delta_{j-1} \cup \Delta_j \cup \Delta_{j+1}, t))d\tau}{(\tau - t)^p} + R_N(\varphi), \tag{5.6}$$

где $t \in (-A_i, A_i)$, $i = 1, 2, 3$; $\quad \varphi_N(t, \Delta_k) = L_{n_k}(\varphi(t), \Delta_k)$, $k = 1, 2, \dots, j-2, j+1, \dots, N-1$, $\varphi_N(t, \Delta_{j-1} \cup \Delta_j \cup \Delta_{j+1}) = L_{n_{j-1}+n_j+n_{j+1}}(\varphi(t, \Delta_{j-1} \cup \cup \Delta_j \cup \Delta_{j+1}))$.

Здесь через $L_n[\varphi(t)]$ обозначен полином, интерполирующий функцию $\varphi(t)$ в сегменте $[t_k, t_{k+1}]$ по n равноотстоящим узлам, включающим концы сегмента, $\sum'$ означает суммирование по $k \neq (j-1, j, j+1)$.

Через $T_p(\varphi, [a,b], c)$ обозначим отрезок ряда Тейлора

$$T_p(\varphi, [a,b], c) = \varphi(c) + \frac{\varphi'(c)}{1!}(t-c) + \cdots + \frac{\varphi^{(p)}(c)}{p!}(t-c)^p$$

разложения функции $\varphi(t)$, определенной на сегменте $[a,b]$.

Отметим, что если $\varphi(t)$ является полиномом, построенным на сегменте $[a,b]$, то в разложении $T_p(\varphi, [a,b], c)$ точка c не обязана принадлежать сегменту $[a,b]$.

Теорема 5.6. Погрешность квадратурных формул (5.6), предназначенных для вычисления интеграла Коши – Адамара (5.2) при $\varphi(0) = 0$ на классе $\Psi = W^r_{\rho_i}(1)$, $i = 1,2,3$, равна $R_N[\Psi] = O(N^{-r+p+1} \ln N)$.

Обозначим через $T_r(t, \Delta_k)$ полином Чебышева 1-го рода степени r, наименее уклоняющийся от нуля в равномерной метрике на сегменте Δ_k, а через $x_1^{(k)}, \dots, x_r^{(k)}$ – его корни. Через $P_r(t, \Delta_k)$ обозначим полином, интерполирующий функцию $\varphi(t)$ на сегменте Δ_k по узлам $x_1^{(k)}, \dots, x_r^{(k)}$. Воспользуемся обозначениями A_i, t^i_k, n^i_k, введенными при построении квадратурных формул вида (5.5), (5.6). Разделим каждый из сегментов $[t^i_k, t^i_{k+1}]$ на $m^i_k = [n^i_k/r] + 1$ равных частей и введем обозначения: $t^i_{k,l} = k + l/m^i_k$.

Интеграл (5.1) будем вычислять по квадратурной формуле:

$$K(\rho_i\psi) = \sum_{k=-A_i}^{A_i-1} \sum_{l=0}^{m^i_{k-1}} \int\limits_{t^i_{k,l}}^{t^i_{k,l+1}} \frac{\rho_i(\tau)(P_r(\psi, [t^i_{k,l}, t^i_{k,l+1}]))}{|\tau - t|^{p+\lambda}}\, d\tau + R_N(\varphi). \qquad (5.7)$$

При построении квадратурных формул вида (5.7) предполагается, что если $s = 0$, то $t^i_{j,s-1} = t_{j-1, m^i_{j-1}-1}$. Выше полагалось $\varphi(t) = \rho_i(t)\psi(t)$.

Теорема 5.7. Погрешность квадратурной формулы (5.7), предназначенной для вычисления интеграла Адамара (5.1) при $\varphi(0) = 0$ на классе $\Psi = W^r_{\rho_i}(1)$, $i = 1,2,3$, равна $R_N[\Psi] = O(N^{-r+p-1+\lambda})$.

Пусть $t \in [t^i_{j,s}, t^i_{j,s+1}]$. Интеграл $F\varphi$ будем вычислять по квадратурной формуле

$$F\varphi = \sum_{k=-A_i}^{j-1} \sum_{l=0}^{m^i_k-1} \int\limits_{t^i_{k,l}}^{t^i_{k,l+1}} \frac{T_p(P_r(\varphi, [t^i_{k,l}, t^i_{k,l+1}]), t)}{(\tau - t)^p}\, d\tau +$$

$$+\sum_{l=0}^{s-2}\int\limits_{t_{j,l}^i}^{t_{j,l+1}^i}\frac{T_p(P_r(\varphi,[t_{j,l}^i,t_{j,l+1}^i]),t)}{(\tau-t)^p}\,d\tau+\int\limits_{t_{j,s-1}^i}^{t_{j,s+2}^i}\frac{T_p(P_r(\varphi,[t_{j,s-1}^i,t_{j,s+2}^i]),t)}{(\tau-t)^p}\,d\tau+$$

$$+\sum_{l=s+2}^{m_j^i-1}\int\limits_{t_{j,l}^i}^{t_{j,l+1}^i}\frac{T_p(P_r(\varphi,[t_{j,l}^i,t_{j,l+1}^i]),t)}{(\tau-t)^p}\,d\tau+$$

$$+\sum_{k=j+1}^{A_i-1}\sum_{l=0}^{m_k^i-1}\int\limits_{t_{k,l}^i}^{t_{k,l+1}^i}\frac{T_p(P_r(\varphi,[t_{k,l}^i,t_{k,l+1}^i]),t)}{(\tau-t)^p}\,d\tau+$$

$$+R_N^i(\varphi),\ i=1,2,3. \tag{5.8}$$

Теорема 5.8. Погрешность квадратурных формул (5.8), предназначенных для вычисления интеграла Коши – Адамара (5.2) при $\varphi(0)=0$ на классе $\Psi=W_{\rho_i}^r(1)$, $i=1,2,3$, равна $|R_N[\Psi]|=O(N^{-r-1+p})$.

Доказательства теорем.

Доказательство теоремы 5.1 проводится по аналогии с более сложным доказательством теоремы 5.2 и поэтому опускается.

Доказательство теоремы 5.2. Для определенности ограничимся доказательством теоремы при весе $\rho_1(t)$. Введем множество точек Q, состоящее из узлов $\{t_k\}$ квадратурной формулы (5.4) и точек $v_k=-1+$ $+k/N$, $k=0,1,\ldots,2N$. Не ограничивая общности, можно считать, что множества узлов $\{t_k\}$, $k=-N,-N+1,\ldots,-1,0,1,\ldots,N$ и $\{v_l\}$, $l=0,1,\ldots,2N$ не совпадают. Точки множества Q обозначим через w_k.

Введем функцию $\varphi_j^*(t)=e^{-|t|}\psi_j^*(t)$, где

$$\psi_j^*(t)=\frac{A(t-w_k)^r(w_{k+1}-t)^r}{((w_{k+1}-w_k)/2)^r}\mathrm{sgn}(t-v_j)^p, t\in[w_k,w_{k+1}].$$

Константа A выбирается из условия $\psi_j^*(t)\in W^r(1)$.

Рассмотрим интеграл

$$F\varphi_j^*(v_j)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi_j^*(\tau)\,d\tau}{(\tau-v_j)^p}\geq\int\limits_{-1}^{1}\frac{\varphi_j^*(\tau)\,d\tau}{(\tau-v_j)^p}\geq\sum_{k=1}^{2N-j-1}\int\limits_{v_{k+j}}^{v_{k+j+1}}\frac{\varphi_j^*(\tau)\,d\tau}{(\tau-v_j)^p}+$$

$$+\sum_{k=0}^{j-2}\int\limits_{v_k}^{v_{k+1}}\frac{\varphi_j^*(\tau)\,d\tau}{(\tau-v_j)^p}\geq\sum_{k=1}^{2N-j-1}\Big(\frac{N}{k}\Big)^p\int\limits_{v_{k+j}}^{v_{k+j+1}}\varphi_j^*(\tau)\,d\tau+\sum_{k=1}^{j-1}\Big(\frac{N}{k}\Big)^p\int\limits_{v_{j-k-1}}^{v_{j-k}}\varphi_j^*(\tau)\,d\tau.$$

Усредним полученное неравенство по значениям j $(j = 0, 1, \ldots, 2N)$. В результате имеем

$$\sup_{\varphi_j \in W^r_{\rho_j}(1)} \max_t (F\varphi)(t) \geq \frac{1}{2N} \sum_{j=0}^{2N-1} (F\varphi^*_j(v_j)) \geq$$

$$\geq \frac{1}{2N} \sum_{j=0}^{2N-1} \Big[\sum_{k=1}^{2N-j-1} \left(\frac{N}{k}\right)^p \int\limits_{v_{k+j}}^{v_{k+j+1}} \varphi^*(\tau)\, d\tau + \sum_{k=1}^{j-1} \left(\frac{N}{k}\right)^p \int\limits_{v_{j-k-1}}^{v_{j-k}} \varphi^*(\tau)\, d\tau \Big] =$$

$$= \frac{N^{p-1}}{2} \Big[\sum_{j=0}^{2N-1} \sum_{k=1}^{2N} \frac{K_1(2N-j-1-k)}{k^p} \int\limits_{v_{j+k}}^{v_{j+k+1}} \varphi^*(\tau)\, d\tau +$$

$$+ \sum_{j=0}^{2N-1} \sum_{k=1}^{2N} \frac{K_1(j-1-k)}{k^p} \int\limits_{v_{j-k-1}}^{v_{j-k}} \varphi^*(\tau)\, d\tau \Big] =$$

$$= \frac{N^{p-1}}{2} \sum_{k=1}^{2N} \frac{1}{k^p} \left[\int\limits_{v_k}^{v_{2N}} \varphi^*(\tau)\, d\tau + \int\limits_{v_0}^{v_{2N-k}} \varphi^*(\tau)\, d\tau \right] \geq$$

$$\geq \frac{N^{p-1}}{2} \int\limits_{-1}^{1} \varphi^*(\tau)\, d\tau \sum_{k=1}^{2N} \frac{1}{k^p} \geq \frac{C}{N^{r-p+1}},$$

где $K_1(x) = 1$, если $x \geq 0$ и $K_1(x) = 0$, если $x < 0$.

Теорема доказана.

Доказательства теорем 5.3 и 5.4 проводятся по аналогии с доказательством предыдущей теоремы.

Доказательство теоремы 5.5. Погрешность квадратурной формулы (5.5) оценивается неравенством

$$|R^i_n(\varphi)| = \sum_{k=-A_i}^{j-1} \Big| \int\limits_{t^i_k}^{t^i_{k+1}} \frac{\varphi(\tau) - \varphi_N(\tau)}{|\tau - t|^{p+\lambda}}\, d\tau \Big| + \Big| \int\limits_{t^i_{j-1}}^{t^i_{j+2}} \frac{\varphi(\tau) - \varphi_N(\tau)}{|\tau - t|^{p+\lambda}}\, d\tau \Big| +$$

$$+ \sum_{k=j+2}^{2N-1} \Big| \int\limits_{t^i_k}^{t^i_{k+1}} \frac{\varphi(\tau) - \varphi_N(\tau)}{|\tau - t|^{p+\lambda}\, d\tau} \Big| + \Big| \int\limits_{-\infty}^{-A_i} \frac{\varphi(\tau)\, d\tau}{|\tau - t|^{p+\lambda}} \Big| + \Big| \int\limits_{A_i}^{\infty} \frac{\varphi(\tau)\, d\tau}{|\tau - t|^{p+\lambda}} \Big| =$$

$$= r^i_1 + r^i_2 + r^i_3 + r^i_4 + r^i_5. \qquad (5.9)$$

Будем считать, что $j > 0$. Подробно рассмотрим случай, когда весовой функцией является $\rho_1(t) = \exp(-|t|)$. Нетрудно видеть, что

$$r^1_1 = \sum_{k=-A_1}^{j-1} \Big| \int\limits_{t^1_k}^{t^1_{k+1}} \frac{\varphi(\tau) - \varphi_N(\tau)}{|\tau - t|^{p+\lambda}}\, d\tau \Big| \leq$$

$$\leq \sum_{k=-A_1}^{-1} |\int\limits_{t_k^1}^{t_{k+1}^1} \frac{\varphi(\tau)-\varphi_N(\tau)}{|\tau-t|^{p+\lambda}}\,d\tau| + \sum_{k=0}^{j-1} |\int\limits_{t_k^1}^{t_{k+1}^1} \frac{\varphi(\tau)-\varphi_N(\tau)}{|\tau-t|^{p+\lambda}}\,d\tau| \leq$$

$$\leq \sum_{k=-A_1}^{-1} \left(\frac{1}{|k|+j}\right)^{p+\lambda} \int\limits_{t_k^1}^{t_{k+1}^1} |\varphi(\tau)-\varphi_N(\tau)|\,d\tau +$$

$$+ \sum_{k=0}^{j-1} \left(\frac{1}{|k-j|}\right)^{p+\lambda} \int\limits_{t_k^1}^{t_{k+1}^1} |\varphi(\tau)-\varphi_N(\tau)|\,d\tau \leq$$

$$\leq \sum_{k=-A_1}^{-1} C \left(\frac{1}{|k|+j}\right)^{p+\lambda} \frac{\ln n_k^1}{(n_k^1)^r} \max_{t_k^1 \leq t \leq t_{k+1}^1} |\varphi^{(r)}(t)| +$$

$$+ \sum_{k=0}^{j-1} C \left(\frac{1}{j-k}\right)^{p+\lambda} \frac{\ln n_k^1}{(n_k^1)^r} \max_{t_k^1 \leq t \leq t_{k+1}^1} |\varphi^{(r)}(t)| \leq$$

$$\leq \sum_{k=-A_1}^{-1} C \left(\frac{1}{|k|+j}\right)^{p+\lambda} \frac{\ln n_k^1}{(n_k^1)^r} \exp(-|t_{k+1}^1|) +$$

$$+ \sum_{k=0}^{j-1} C \left(\frac{1}{j-k}\right)^{p+\lambda} \frac{\ln n_k^1}{(n_k^1)^r} \exp(-t_{k+1}^1) \leq$$

$$\leq \sum_{k=-A_1}^{-1} C \left(\frac{1}{|k|+j}\right)^{p+\lambda} \frac{\ln n_k^1}{(n_k^1)^r} \exp(-k) +$$

$$+ \sum_{k=0}^{j-1} C \left(\frac{1}{j-k}\right)^{p+\lambda} \frac{\ln n_k^1}{(n_k^1)^r} \exp(-k) \leq$$

$$\leq \sum_{k=-A_1}^{-1} \frac{C}{|j-k|^{p+\lambda}} \frac{\ln(N/e^{|k|/r})}{(N/e^{|k|/r})^r} \exp(-|k|) +$$

$$+ \sum_{k=0}^{j-1} \frac{C}{(j-|k|)^{p+\lambda}} \frac{\ln(N/e^{k/r})}{(N/e^{k/r})^r} \exp(-k) \leq CN^{-r}\ln N. \qquad (5.10)$$

Приступим к оценке r_2'. Воспользовавшись определением гиперсингулярного интеграла и тем обстоятельством, что $r \geq p+1$, имеем:

$$r_2' = \left| \int\limits_{t_{j-1}^1}^{t_{j+2}^1} \frac{\varphi(\tau)-\varphi_N(\tau)}{|\tau-t|^{p+\lambda}} d\tau \right| =$$

$$= \left| \int\limits_{t_{j-1}^1}^{t} \frac{\varphi(\tau) - \varphi_N(\tau)}{(t-\tau)^{p+\lambda}} d\tau + \int\limits_{t}^{t_{j+2}^1} \frac{\varphi(\tau) - \varphi_N(\tau)}{(\tau - t)^{p+\lambda}} \right| \leq$$

$$\leq \left| \int\limits_{t_{j-1}^1}^{t-h_j^1} \frac{\psi_N(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{p+\lambda}} \right| + \left| \int\limits_{t-h_j^1}^{t} \frac{\psi_N(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{p+\lambda}} \right| +$$

$$+ \left| \int\limits_{t}^{t+h_j^1} \frac{\psi_N(\tau) d\tau}{(\tau - t)^{p+\lambda}} \right| + \left| \int\limits_{t+h_j^1}^{t_{j+2}^1} \frac{\psi_N(\tau) d\tau}{(\tau - t)^{p+\lambda}} \right| =$$

$$= r'_{21} + r'_{22} + r'_{23} + r'_{24}, \qquad (5.11)$$

где $h_j^1 = 1/n_j^1$, $\psi_N(\tau) = \varphi(t) - \varphi_N(t)$.

Оценим каждое из слагаемых в правой части предыдущего неравенства.

Очевидно,

$$r'_{21} \leq \sum_{k=1}^{M_{j-1}^1} \left| \int\limits_{t-(k+1)h_j^1}^{t-kh_j^1} \frac{\psi_N(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{p+\lambda}} \right| \leq$$

$$\leq B(n_j^1)^{-(r+1-p-\lambda)} \ln n_j^1 \sum_{k=1}^{M_j^1} \frac{1}{k^{p+\lambda}} \leq B(n_j^1)^{-(r+1-p-\lambda)} \ln n_j^1. \qquad (5.12)$$

Здесь $M_j = [(t - t_{j-1}^1)/h_j^1]$, причем для простоты обозначений полагаем, что $(t - t_{j-1}^1)/h_j^1$– целое число.

Аналогично оценивается

$$r'_{24} \leq B(n_j)^{-(r+1-p-\lambda)} \ln n_j^1. \qquad (5.13)$$

Приступим к оценке r'_{22}. Воспользовавшись определением гиперсингулярного интеграла, имеем:

$$r'_{22} = \left| \sum_{k=0}^{p-1} D_k \frac{\psi_N^{(k)}(t-h_j^1)}{(h_j^1)^{p+\lambda-k-1}} + D_p \int\limits_{t-h_j^1}^{t} \frac{\psi_N^{(p)}(\tau)}{(t-\tau)^{\lambda}} d\tau \right| \leq$$

$$\leq \sum_{k=0}^{p-1} \left| D_k \frac{\psi_N^{(k)}(t-h_j^1)}{(h_j^1)^{p+\lambda-k-1}} \right| + |D_p| \left| \int\limits_{t-h_j^1}^{t} \frac{\psi_N^{(p)}(\tau)}{(t-\tau)^{\lambda}} d\tau \right| =$$

$$= r'_{221} + r'_{222}. \qquad (5.14)$$

Из обратных теорем конструктивной теории функций (подробное доказательство см. в разделе 4 главы 1) следует, что

$$|\psi_N^{(k)}(t-h_j^1)| \leq Cn_j^{-(r-k)}e^{-|j|}\ln n_j.$$

Поэтому

$$\left|\frac{\psi_N^{(k)}(t-h_j^1)}{(h_j^1)^{p+\lambda-k-1}}\right| \leq Cn_j^{r+1-p-\lambda}e^{-|j|}\ln n_j$$

и, следовательно,

$$r'_{221} \leq \frac{C}{n_j^{(r+1-p-\lambda)}e^j} \leq C\frac{e^{|j|(r+1-p-\lambda)/r}e^{-j}}{N^{r+1-p-\lambda}}\ln n_j \leq$$

$$\leq C\frac{\ln N}{N^{r+1-p-\lambda}}. \qquad (5.15)$$

Приступим к оценке выражения r'_{222} :

$$r'_{222} \leq |D_p||\psi_N^{(p)}(\tau)|h_j^{1-\lambda} \leq C(n_j^1)^{r-p+1-\lambda}\ln n_j^1 \leq$$

$$\leq C\frac{\ln N}{N^{r+1-p-\lambda}}. \qquad (5.16)$$

Из оценок (5.15), (5.16) следует, что

$$r'_{22} \leq C\frac{\ln N}{N^{r+1-p-\lambda}}. \qquad (5.17)$$

Аналогичная оценка справедлива и для r'_{23} :

$$r'_{23} \leq C\frac{\ln N}{N^{r+1-p-\lambda}}. \qquad (5.18)$$

Из оценок (5.12), (5.13), (5.17), (5.18) следует неравенство

$$r'_2 \leq C\frac{\ln N}{N^{r+1-p-\lambda}}. \qquad (5.19)$$

Выражение r'_3 оценивается по аналогии с выражением r'_1 и для него справедлива оценка

$$r'_3 \leq C\frac{\ln N}{N^r}. \qquad (5.20)$$

Оценим интеграл r_5^1, полагая, что $\varphi(0) = 0$. Тогда

$$r_5^1 = \int\limits_{A_1}^{\infty}\frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{|\tau-t|^{p+\lambda}} = \int\limits_{A_1}^{\infty}\frac{\varphi(\tau)-\varphi(0)}{|\tau-t|^{p+\lambda}}\,d\tau = \int\limits_{A_1}^{\infty}\frac{e^{-\tau}(\psi(\tau)-\psi(0))}{|\tau-t|^{p+\lambda}}\,d\tau.$$

Рассмотрим отдельно случаи, когда $-A_1 \le t \le A_1$ и когда $t \in (-\infty, -A_1] \cup [A_1, \infty)$. В первом случае

$$r_5^1 \le \int\limits_{A_1}^{\infty} \frac{e^{-\tau}\tau\, d\tau}{|\tau - t|^{p+\lambda}} \le CA_1 \int\limits_{A_1}^{\infty} e^{-\tau}\, d\tau = CN^{-r+p-1} \ln N.$$

Во втором случае, воспользовавшись определением интеграла Адамара, имеем:

$$r_5^1 \le \int\limits_{A_1}^{\infty} \frac{e^{-\tau}(\psi(\tau) - \psi(0))}{|\tau - t|^{p+\lambda}}\, d\tau \le$$

$$\le C \int\limits_{A_1}^{\infty} \frac{(e^{-\tau}(\psi(\tau) - \psi(0)))^{(p)}}{|\tau - t|^{\lambda}}\, d\tau + CN^{-r+p-1} = CN^{-r+p-1}.$$

Следовательно,

$$r_5^1 = CN^{-r+p-1}. \tag{5.21}$$

Интеграл r_4^1 оценивается аналогично:

$$r_4' \le CN^{-r+p-1}. \tag{5.22}$$

Из неравенств (5.9), (5.10), (5.19) – (5.22) следует справедливость утверждения теоремы для квадратурной формулы (5.5). Погрешность квадратурной формулы (5.6) оценивается аналогично.

Теорема доказана.

Доказательство теоремы 5.6. Погрешность квадратурной формулы (5.7) оценивается неравенством

$$|R_n^i(\varphi)| \le \sum_{k=-A_i}^{j-1} \Big|\int\limits_{t_k^i}^{t_{k+1}^i} \frac{\varphi(\tau) - \varphi_N(\tau)}{(\tau - t)^p}\, d\tau\Big| + \Big|\int\limits_{t_{j-1}^i}^{t_{j+2}^i} \frac{\varphi(\tau) - \varphi_N(\tau)}{(\tau - t)^p}\, d\tau\Big| +$$

$$+ \sum_{k=-j+2}^{2N-1} \Big|\int\limits_{t_k^i}^{t_{k+1}^i} \frac{\varphi(\tau) - \varphi_N(\tau)}{(\tau - t)^p}\, d\tau\Big| + \Big|\int\limits_{-\infty}^{-A_i} \frac{\varphi(\tau)\, d\tau}{(\tau - t)^p}\Big| + \Big|\int\limits_{A_i}^{\infty} \frac{\varphi(\tau)\, d\tau}{(\tau - t)^p}\Big| =$$

$$= r_1^i + r_2^i + r_3^i + r_4^i + r_5^i.$$

Выражения $r_1^i, r_3^i, r_4^i, r_5^i$ оцениваются точно по такой же схеме, что и аналогичные выражения, рассмотренные при доказательстве предыдущей теоремы. Исключение составляет оценка интеграла r_2^i

$$r_2^1 = |\int\limits_{t^i_{j-1}}^{t^i_{j+2}} \frac{\varphi(\tau)-\varphi_N(\tau)}{(\tau-t)^p}\,d\tau| = |\int\limits_{t^i_{j-1}}^{t^i_{j+2}} \frac{(\varphi(\tau)-\varphi_N(\tau))^{(p-1)}}{(\tau-t)}\,d\tau| + AN^{-r+p-1} \le$$

$$\le AN^{-r+p-1}\ln N.$$

Из полученных оценок следует неравенство $|R^i_N(\varphi)| \le AN^{-r+p-1}\ln N$. Отсюда следует, что $R_N[\Psi] \le AN^{-r+p-1}\ln N$.

Теорема доказана.

Доказательство теоремы 5.7. В лемме 3.2 из главы 1 первой части книги приведена классическая оценка погрешности интерполяционной формулы, утверждающая, что на сегменте $[-1,1]$ погрешность интерполяционной формулы

$$|f(\tau)-P_r(\tau,[-1,1])| \le \max|f^{(r)}|/r!2^{r-1}.$$

Пользуясь этой оценкой и повторяя выкладки, приведенные при доказательстве теоремы 5.5, убеждаемся в справедливости оценки:

$$|R_N(\varphi)| \le CN^{-r+p-1+\lambda}.$$

Отсюда следует, что $R_N[\Psi] \le CN^{-r+p-1+\lambda}$. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 5.8. Погрешность квадратурной формулы (5.18) оценивается неравенством

$$|R^i_N(\varphi)| \le \sum_{k=-A_i}^{j-1}\sum_{l=0}^{m^i_k-1} |\int\limits_{t^i_{k,l}}^{t^i_{k,l+1}} \frac{\varphi(\tau)-P_r(\tau,[t^i_{k,l},t^i_{k,l+1}])}{(\tau-t)^p}\,d\tau| +$$

$$+\sum_{l=0}^{s-2}|\int\limits_{t^i_{j,l}}^{t^i_{j,l+1}} \frac{\varphi(\tau)-P_r(\tau,[t^i_{j,l},t^i_{j,l+1}])}{(\tau-t)^p}\,d\tau| +$$

$$+|\int\limits_{t^i_{j,s-1}}^{t^i_{j,s+2}} \frac{\varphi(\tau)-P_r(\tau,[t^i_{j,s-1},t^i_{j,s+2}])}{(\tau-t)^p}\,d\tau| +$$

$$+\sum_{l=s+2}^{m^i_j-1}|\int\limits_{t^i_{j,l}}^{t^i_{j,l+1}} \frac{\varphi(\tau)-P_r(\tau,[t^i_{j,l},t^i_{j,l+1}])}{(\tau-t)^p}\,d\tau| +$$

$$+\sum_{k=j+1}^{A_i-1}\sum_{l=0}^{m_k^i-1}|\int\limits_{t_{k,l}^i}^{t_{k,l+1}^i}\frac{\varphi(\tau)-P_r(\tau,[t_{k,l}^i,t_{k,l+1}^i])}{(\tau-t)^p}\,d\tau|\le$$

$$\le r_1^i+r_2^i+r_3^i+r_4^i+r_5^i.$$

Суммы r_1^i и r_5^i оцениваются одинаково. Для определенности будем считать $j>0$. Нетрудно видеть, что

$$r_1^i=\sum_{k=-A_i}^{-1}\frac{1}{(j-k)^p}\sum_{l=0}^{m_k^i-1}\int\limits_{t_{k,l}^i}^{t_{k,l+1}^i}|\varphi(\tau)-P_r(\tau,[t_{k,l}^i,t_{k,l+1}^i])\,d\tau|+$$

$$+\sum_{k=0}^{j-1}\frac{1}{(j-k)^p}\sum_{l=0}^{m_k^i-1}\int\limits_{t_{k,l}^i}^{t_{k,l+1}^i}|\varphi(\tau)-P_r(\tau,[t_{k,l}^i,t_{k,l+1}^i])|\,d\tau\le CN^{-r}.$$

Суммы r_2^i и r_4^i также оцениваются одинаково. Поэтому ограничимся рассмотрением первой из них

$$r_2^i=\sum_{l=0}^{s-2}|\int\limits_{t_{j,l}^i}^{t_{j,l+1}^i}\frac{\varphi(\tau)-P_r(\tau,[t_{j,l}^i,t_{j,l+1}^i])}{(\tau-t)^p}\,d\tau|\le$$

$$\le\sum_{l=0}^{s-2}\left(\frac{m_j^i}{s-l}\right)^p\int\limits_{t_{j,l}^i}^{t_{j,l+1}^i}|\varphi(\tau)-P_r(\tau,[t_{j,l}^i,t_{j,l+1}^i])|\,d\tau\le$$

$$\le\sum_{l=0}^{s-2}\left(\frac{m_j^i}{s-l}\right)^p\left(\frac{1}{2m_j^i}\right)^{r+1}\frac{R_r(1)}{2^r(r+1)!}\le CN^{-r-1+p}.$$

Осталось оценить интеграл r_3^i

$$r_3^i=|\int\limits_{t_{j,s-1}^i}^{t_{j,s+2}^i}\frac{\varphi(\tau)-P_r(\tau,[t_{j,s-1}^i,t_{j,s+2}^i])}{(\tau-t)^p}\,d\tau|\le CN^{-r+1-1}\ln r=$$

$$=O(N^{-r+p-1}).$$

Из оценок величин $r_1^i,\dots,r_5^i$ следует, что $|R_N(\varphi)|\le AN^{-r-1+p}$ и, следовательно, $R_N[\Psi]\le AN^{-r-1+p}$.

Теорема доказана.

Предыдущие квадратурные формулы требовали разложения полиномов $P_r(\varphi, \Delta_k)$ в ряд Тейлора по степеням до r-го порядка, где r могло быть достаточно большим числом.

Представляет интерес построение квадратурных формул, в которых полиномы $P_r(\varphi, \Delta_k)$ разлагаются по формуле Тейлора до p-го порядка.

Для гиперсингулярных интегралов на конечных интервалах интегрирования подобные формулы построены в предыдущем разделе. Распространим полученные там результаты на интегралы вида (5.2). При этом для краткости ограничимся рассмотрением только квадратурных формул вида (5.8).

Будем также использовать обозначения, введенные при описании квадратурной формулы (5.8).

Пусть $t \in \Delta^i_{j,s}$. Интеграл $F(\varphi)$ будем вычислять по квадратурной формуле

$$F(\varphi) = \sum_{k=-A_i}^{j-1} \sum_{l=0}^{m^i_k - 1} \int\limits_{\Delta^i_{k,l}} P_r \left[\frac{\varphi_r(\tau, \Delta^i_{k,l}) - T_p(\varphi_r(\tau, \Delta^i_{k,l}), \Delta^i_{k,l}, t)}{(\tau - t)^p}; \Delta^i_{k,l} \right] d\tau +$$

$$+ \sum_{l=0}^{s-2} \int\limits_{\Delta^i_{j,l}} P_r \left[\frac{\varphi_r(\tau, \Delta^i_{j,l}) - T_p(\varphi_r(\tau, \Delta^i_{j,l}), \Delta^i_{j,l}, t)}{(\tau - t)^p}; \Delta^i_{j,l} \right] d\tau +$$

$$+ \int\limits_{\Delta^{*i}_{j,s}} P_r \left[\frac{\varphi_r(\tau, \Delta^{*i}_{j,s}) - T_p(\varphi_r(\tau, \Delta^{*i}_{j,s}), \Delta^{*i}_{j,s}, t)}{(\tau - t)^p}; \Delta^{*i}_{j,s} \right] d\tau +$$

$$+ \sum_{l=s+2}^{m^i_j - 1} \int\limits_{\Delta^i_{j,l}} P_r \left[\frac{\varphi_r(\tau, \Delta^i_{j,l}) - T_p(\varphi_r(\tau, \Delta^i_{j,l}), \Delta^i_{j,l}, t)}{(\tau - t)^p}; \Delta_{j,l} \right] d\tau +$$

$$+ \sum_{k=j+1}^{A_i - 1} \sum_{l=0}^{m^i_k - 1} \int\limits_{\Delta^i_{k,l}} P_r \left[\frac{\varphi_r(\tau, \Delta^i_{k,l}) - T_p(\varphi_r(\tau, \Delta^i_{k,l}), \Delta^i_{k,l}, t)}{(\tau - t)^p}; \Delta^i_{k,l} \right] d\tau +$$

$$+ R^i_N(\varphi), \qquad (5.23)$$

где $\varphi_r(\tau, \Delta_k) = P_r(\varphi, \Delta_k)$, $\Delta^{*i}_{j,s} = \Delta^i_{j,s-1} \cup \Delta^i_{j,s} \cup \Delta^i_{j,s+1}$.

Для квадратурной формулы (5.23) справедливы утверждения, сформулированные в теореме 5.8. На их доказательстве не останавливаемся, так как они являются объединением доказательств теоремы 5.8 и теоремы 4.3.

6. Приближенное вычисление гиперсингулярных интегралов в комплексной плоскости

Рассмотрим интеграл Адамара в комплексной плоскости

$$A\varphi = \int\limits_L \frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{(\tau - t)^p} \tag{6.1}$$

по замкнутому контуру L. Функция $\varphi(\tau)$ определена на всем контуре и имеет производные до r-го порядка включительно, причем $\max\limits_L |\varphi^{(r)}(\tau)| \leq$ ≤ 1, т. е. $\varphi(\tau) \in W^r(1)$. Предположим, что функция $\varphi(\tau)$ задана с погрешностью. Это означает, что вместо функции $\varphi(\tau)$ задана функция $\tilde{\varphi}(\tau)$, такая, что $\max |\varphi(\tau) - \tilde{\varphi}(\tau)| \leq \varepsilon$.

Проведем разбиение контура L на N равных частей точками t_k и построим квадратурную формулу следующего вида:

$$A\varphi = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N-1} \tilde{\varphi}(t'_k) \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \left[\frac{1}{(\tau - t + \bar{n}h)^p} + \frac{1}{(\tau - t - \bar{n}h)^p}\right] d\tau + R_N(\varphi), \tag{6.2}$$

где t'_k – точка контура L, равноотстоящая от t_k и t_{k+1}; $h = N^{-1/p}$; $\bar{n}$ – нормальный вектор к контуру L в точке t'_k, направленный вне контура L.

Теорема 6.1. Пусть функция $\varphi(\tau) \in W^r(1)$ $(r \geq p)$ задана на кривой L значениями $\tilde{\varphi}(t'_k)$, причем $|\varphi(t'_k) - \tilde{\varphi}(t'_k)| \leq \varepsilon$. Погрешность квадратурной формулы (6.2) при $h = N^{-1/p}$ оценивается неравенством
$R_N[W^r(1)] \leq A(N^{-1/p}\ln N + \varepsilon N^{1-1/p})$.

Доказательство. Из результатов Л. А. Чикина [71] следует, что

$$\frac{1}{\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{(\tau - t)^p} = e^+(t) + e^-(t),$$

где $e^+(t) = \lim\limits_{\eta\to 0}\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int\limits_L \frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{(\tau - (t + \bar{n}\eta))^p}$, $e^-(t) = \lim\limits_{\eta\to 0}\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int\limits_L \frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{(\tau - (t - \bar{n}\eta))^p}$.

По определению интеграла Адамара

$$\int\limits_L \frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{(\tau - t)^p} = \frac{1}{(p-1)!}\int\limits_L \frac{\varphi^{(p-1)}(\tau)}{\tau - t}\,d\tau.$$

Интегрируя по частям, имеем:

$$\int\limits_L \frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{(\tau - (t - \bar{n}h))^p} + \int\limits_L \frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{(\tau - (t + \bar{n}h))^p} =$$

$$= \frac{1}{(p-1)!}\left[\int\limits_L \frac{\varphi^{(p-1)}(\tau)\,d\tau}{\tau-(t-\bar{n}h)} + \int\limits_L \frac{\varphi^{(p-1)}(\tau)\,d\tau}{\tau-(t+\bar{n}h)}\right].$$

Тогда

$$\int\limits_L \frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{(\tau-t)^p} = \lim_{\eta\to 0}\frac{1}{2(p-1)!}\left[\int\limits_L \frac{\varphi^{(p-1)}(\tau)\,d\tau}{\tau-(t-\bar{n}\eta)} + \int\limits_L \frac{\varphi^{(p-1)}(\tau)\,d\tau}{\tau-(t+\bar{n}\eta)}\right].$$

Из этого соотношения следует оценка погрешности квадратурной формулы (6.2):

$$|R_N(\varphi)| =$$

$$= \left|\int\limits_L \frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{(\tau-t)^p} - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N}\tilde{\varphi}(t'_k)\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}}\left[\frac{1}{(\tau-(t-\bar{n}h))^p} + \frac{1}{(\tau-(t+\bar{n}h))^p}\right]d\tau\right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2(p-1)!}\left|\lim_{\eta\to 0}\left\{\left[\int\limits_L \frac{\varphi^{(p-1)}(\tau)\,d\tau}{\tau-(t-\bar{n}\eta)} + \int\limits_L \frac{\varphi^{(p-1)}(\tau)\,d\tau}{\tau-(t+\bar{n}\eta)}\right]-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\left[\int\limits_L \frac{\varphi^{(p-1)}(\tau)\,d\tau}{\tau-(t-\bar{n}h)} + \int\limits_L \frac{\varphi^{(p-1)}(\tau)\,d\tau}{\tau-(t+\bar{n}h)}\right]\right\}\right|+$$

$$+\frac{1}{2}\left|\int\limits_L \frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{[\tau-(t-\bar{n}h)]^p} - \sum_{k=0}^{N-1}\varphi(t'_k)\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}}\frac{d\tau}{(\tau-(t-\bar{n}h))^p}\right|+$$

$$+\frac{1}{2}\left|\int\limits_L \frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{(\tau-(t+\bar{n}h))^p} - \sum_{k=0}^{N-1}\varphi(t'_k)\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}}\frac{d\tau}{(\tau-(t+\bar{n}h))^p}\right|+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N-1}|\varphi(t'_k)-\tilde{\varphi}(t'_k)|\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}}\frac{|d\tau|}{|\tau-(t-\bar{n}h)}|^p+$$

$$+\frac{1}{2}|\sum_{k=0}^{N-1}|\varphi(t'_k)-\tilde{\varphi}(t'_k)|\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}}\frac{|d\tau|}{|\tau-(t+\bar{n}h)}|^p \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}(r_1+r_2+r_3+r_4+r_5+r_6).$$

Оценим каждое слагаемое в отдельности:

$$r_1 = \lim_{\eta\to 0}\left|\int\limits_L \left[\frac{\varphi(\tau)}{(\tau-(t+\bar{n}h))^p} - \frac{\varphi(\tau)}{(\tau-(t+\bar{n}\eta))^p}\right]d\tau\right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{(p-1)!}\lim_{\eta\to 0}\Big|\int\limits_L\left[\frac{\varphi^{(p-1)}(\tau)}{\tau-(t+\bar{n}h)}-\frac{\varphi^{(p-1)}(\tau)}{\tau-(t+\bar{n}\eta)}\right]d\tau\Big|\leq$$

$$\leq \frac{1}{(p-1)!}\lim_{\eta\to 0}\Big|\int\limits_L\Big[\frac{\varphi^{(p-1)}(\tau)-\varphi^{(p-1)}(t)-\ldots-\frac{\varphi^{(r-1)}(t)}{(r-p)!}(\tau-t)^{r-p}}{\tau-(t+\bar{n}h)}-$$

$$-\frac{\varphi^{(p-1)}(\tau)-\varphi^{(p-1)}(t)-\ldots-\frac{\varphi^{(r-1)}(t)}{(r-p)!}(\tau-t)^{r-p}}{\tau-(t+\bar{n}\eta)}\Big]d\tau\Big|=$$

$$=\frac{1}{(p-1)!}\lim_{\eta\to 0}\Big|\int\limits_L\frac{\psi(\tau)((\tau-(t+\bar{n}\eta))-(\tau-(t+\bar{n}h)))}{(\tau-(t+\bar{n}\eta))(\tau-(t+\bar{n}h))}d\tau\Big|\leq$$

$$\leq Ah\lim_{\eta\to 0}\Big|\int\limits_L\frac{|\tau-t|^{r+1-p}}{|\tau-t-\bar{n}h||\tau-t-\bar{n}\eta|}d\tau\Big|\leq Ah\Big|\int\limits_L\frac{|\tau-t|^{r-p}}{|\tau-t-\bar{n}h|}|d\tau|,$$

где $\psi(\tau)=\varphi^{(p-1)}(\tau)-\varphi^{(p-1)}(t)-\ldots-\frac{\varphi^{(r-p)}(t)}{(r-p)!}(\tau-t)^{r-p}$.

Здесь нужно рассмотреть два случая: 1) $r=p$, 2) $r>p$.

В первом случае

$$\int\limits_L\frac{|d\tau|}{|\tau-t-\bar{n}h|}\leq A|\ln h|$$

и, следовательно, $r_1\leq Ah|\ln h|$.

Во втором случае

$$\int\limits_L\frac{|\tau-t|^{r-p}}{|\tau-t-\bar{n}h|}|d\tau|\leq A$$

и, следовательно, $r_1\leq Ah$.

Аналогично оценивается r_2.

Проведем оценку r_3 :

$$r_3=\frac{1}{2}|\int\limits_L\frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{(\tau-(t+\bar{n}h))^p}-\sum_{k=0}^{N-1}\varphi(t'_k)\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}}\frac{d\tau}{(\tau-(t+\bar{n}h))^p}|\leq$$

$$\leq\sum_{k=0}^{N-1}|\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}}\frac{\varphi(\tau)-\varphi(t'_k)}{(\tau-(t-\bar{n}h))^p}d\tau|\leq A\sum_{k=0}^{N-1}\frac{\Delta_k^2}{(h^2+k^2\Delta_k^2)^{p/2}}\leq$$

$$\leq A(\Delta^*)^2\sum_{k=0}^{N-1}\frac{1}{(h^2+k^2\Delta_*^2)^{p/2}}\leq$$

$$\leq A(\Delta^*)^2 \left(\sum_{k=0}^{N_1} \frac{1}{(h^2 + k^2\Delta_*^2)^{p/2}} + \sum_{k=N_1+1}^{N-1} \frac{1}{(h^2 + k^2\Delta_*^2)^{p/2}} \right) \leq$$

$$\leq A(\Delta^*)^2 \left(\frac{N_1}{h^p} + \frac{1}{\Delta_*^p} \sum_{k=N_1+1}^{N-1} \frac{1}{(a^2 + k^2)^{p/2}} \right) \leq$$

$$\leq A(\Delta^*)^2 \left(\frac{N_1}{h^p} + \frac{1}{\Delta_*^p} \sum_{k=N_1+1}^{N-1} \frac{1}{k^p} \right) \leq$$

$$\leq A(\Delta^*)^2 \left(\frac{N_1}{h^p} + \frac{1}{\Delta_*^p (p-1) N_1^{p-1}} \right) \leq A(\Delta^*)^2 \frac{1}{h^{p-1}\Delta_*} \leq \frac{A}{h^{p-1}N},$$

где Δ_k – длина дуги (t_k, t_{k+1}); $\Delta^* = \max \Delta_k$, $\Delta_* = \min \Delta_k$; N_1 – наибольшее целое число, при котором сохраняется неравенство $h \geq N_1\Delta_*$, $a = h/\Delta_*$.

Аналогично оценивается r_4.

Оценка r_5 производится следующим образом:

$$r_5 = |\sum_{k=0}^{N-1} (\varphi(t'_k) - \tilde{\varphi}(t'_k)) \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{d\tau}{(\tau - (t - \bar{n}h))^p}| \leq$$

$$\leq \varepsilon \sum_{k=0}^{N-1} |\int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{d\tau}{(\tau - (t - \bar{n}h))^p}| \leq A\varepsilon \sum_{k=0}^{N-1} \frac{|t_{k+1} - t_k|}{(k^2/N^2 + h^2)^{p/2}} =$$

$$= A\varepsilon N^{p-1} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{(k^2 + h^2N^2)^{p/2}} \leq A\frac{\varepsilon}{h^{p-1}}.$$

Оценка выражения r_6 проводится аналогично. Из полученных выше неравенств имеем

$$|R_N(\varphi)| \leq A(N^{-1/p} \ln N + \varepsilon N^{1-1/p})$$

и, следовательно,

$$R_N[W^r(1)] \leq A(N^{-1/p} \ln N + \varepsilon N^{1-1/p}).$$

Теорема доказана.

7. Вычисление гиперсингулярных интегралов на конечном сегменте в плоскости комплексной переменной

Рассмотрим функцию $\varphi(\tau)$, определенную на сегменте $[-1,1]$, имеющую производные до r-го порядка включительно. Предположим, что функция $\varphi(\tau)$ задана на $[-1,1]$ приближенными значениями $\tilde{\varphi}(\tau)$, такими, что $|\varphi(\tau)-\tilde{\varphi}(\tau)| \le \varepsilon$.

Для интегралов Адамара

$$A\varphi = \int_{-1}^{1} \frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{(\tau-t)^p}, \quad -1 < t < 1, \quad 2 \le p \le r, \tag{7.1}$$

построим квадратурную формулу следующего вида:

$$A\varphi = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N-1}{}'\tilde{\varphi}(t_k)\left[\int_{t_k}^{t_{k+1}}\left(\frac{1}{[\tau-(t-ih)]^p}+\frac{1}{[\tau-(t+ih)]^p}\right)d\tau\right]+$$

$$+\frac{1}{2}\tilde{\varphi}(t'_j)\left[\int_{t_{j-1}}^{t_{j+2}}\left(\frac{1}{[\tau-(t-ih)]^p}+\frac{1}{[\tau-(t+ih)]^p}\right)d\tau\right]+R_N(\varphi), \tag{7.2}$$

где $t_k=-1+2k/N$, $k=0,1,\ldots,N-1$. Сумма $\sum\limits_{k=0}^{N-1}{}'$ означает, что суммирование проводится при $k \ne j-1, j, j+1$; $t'_k=(t_k+t_{k+1})/2$, $h=N^{-1/p}$. Особая точка t находится внутри интервала $[-1+\Delta, 1-\Delta]$, где $\Delta=h^{q/p}$, $0<q<4^{-1}$.

Замечание.[1] Более точной является формула

$$A\varphi = \sum_{k=0}^{N-1}{}'\tilde{\varphi}(t'_k)\int_{t_k}^{t_{k+1}}\frac{d\tau}{(\tau-t)^p}+$$

$$+\frac{1}{2}\tilde{\varphi}(t'_j)\left[\int_{t_{j-1}}^{t_{j+2}}\left(\frac{1}{[\tau-(t-ih)]^p}+\frac{1}{[\tau-(t+ih)]^p}\right)d\tau\right]+R_N(\varphi),$$

где $\sum'$ означает суммирование по $k \ne j-1, j, j+1$, $t \in [t_j, t_{j+1})$.

Замечание также справедливо для интегралов, определенных на всей оси и может быть распространено на многомерные интегралы в смысле Адамара.

[1] Это замечание высказано доцентом А. С. Турбабиным.

Теорема 7.1 [24]. Пусть $\varphi(\tau) \in W^r(1)$ и $|\varphi(\tau) - \tilde{\varphi}(\tau)| \le \varepsilon, -1 + \Delta \le \le t \le 1 - \Delta$. Для интеграла Адамара (7.1) квадратурная формула (7.2) при $h = O(N^{-1/p})$ имеет погрешность $R_N[W^r(1)] \le A((N^{-1/p}/\Delta) + \varepsilon N^{1-1/p})$.

Доказательство. Представим интеграл Адамара (7.1) в виде суммы интегралов

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{(\tau - t)^p} = \lim_{\eta \to 0} \left[\int\limits_{-1}^{t-\eta} \frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{(\tau - t)^p} + \int\limits_{t+\eta}^{1} \frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{(\tau - t)^p} + \int\limits_{t-\eta}^{t+\eta} \frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{(\tau - t)^p} \right].$$

Из определения интеграла Адамара следует, что

$$\int\limits_{t-\eta}^{t+\eta} \frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{(\tau - t)^p} = \frac{1}{(p-1)!} \int\limits_{t-\eta}^{t+\eta} \frac{\varphi^{(p-1)}(\tau)\,d\tau}{\tau - t} -$$

$$- \frac{1}{(p-1)!\eta} \{\varphi^{(p-1)}(t+\eta) - (-1)\varphi^{(p-1)}(t-\eta)\} -$$

$$- \frac{2!}{(p-1)!\eta^2} \{\varphi^{(p-2)}(t+\eta) - (-1)^2\varphi^{(p-2)}(t-\eta)\} - \cdots$$

$$\cdots - \frac{(p-2)!}{(p-1)!\eta^{p-1}} \{\varphi(t+\eta) - (-1)^{p-1}\varphi(t-\eta)\}. \tag{7.3}$$

Вычислив по частям интегралы

$$\int\limits_{-1}^{t-\eta} \frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{(\tau - t)^p} \quad \text{и} \quad \int\limits_{t+\eta}^{1} \frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{(\tau - t)^p}$$

и воспользовавшись формулой (7.3), получим:

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{(\tau - t)^p} = \frac{1}{(p-1)!} \int\limits_{-1}^{1} \frac{\varphi^{(p-1)}(\tau)}{\tau - t}\,d\tau +$$

$$+ \frac{1!}{(p-1)!} \left\{ \frac{\varphi^{(p-1)}(-1)}{-1-t} - \frac{\varphi^{(p-1)}(1)}{1-t} \right\} +$$

$$+ \frac{2!}{(p-1)!} \left\{ \frac{\varphi^{(p-2)}(-1)}{(-1-t)^2} - \frac{\varphi^{(p-2)}(1)}{(1-t)^2} \right\} + \cdots$$

$$\cdots + \frac{(p-4)!}{(p-1)!} \left\{ \frac{\varphi''(-1)}{(-1-t)^{p-3}} - \frac{\varphi''(1)}{(1-t)^{p-3}} \right\} +$$

$$+\frac{(p-3)!}{(p-1)!}\left\{\frac{\varphi'(-1)}{(-1-t)^{p-2}}-\frac{\varphi'(1)}{(1-t)^{p-2}}\right\}+$$

$$+\frac{1}{p-1}\left\{\frac{\varphi(-1)}{(-1-t)^{p-1}}-\frac{\varphi(1)}{(1-t)^{p-1}}\right\}. \tag{7.4}$$

Аналогично,

$$\int_{-1}^{1}\frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{(\tau-t+ih)^p}=\frac{1}{(p-1)!}\int_{-1}^{1}\frac{\varphi^{(p-1)}(\tau)\,d\tau}{\tau-t+ih}+$$

$$+\frac{1!}{(p-1)!}\left\{\frac{\varphi^{(p-1)}(-1)}{-1-t+ih}-\frac{\varphi^{(p-1)}(1)}{1-t+ih}\right\}+$$

$$+\frac{2!}{(p-1)!}\left\{\frac{\varphi^{(p-2)}(-1)}{(-1-t+ih)^2}-\frac{\varphi^{(p-2)}(1)}{(1-t+ih)^2}\right\}+\cdots$$

$$\cdots+\frac{(p-4)!}{(p-1)!}\left\{\frac{\varphi''(-1)}{(-1-t+ih)^{p-3}}-\frac{\varphi''(1)}{(1-t+ih)^{p-3}}\right\}+$$

$$+\frac{(p-3)!}{(p-1)!}\left\{\frac{\varphi'(-1)}{(-1-t+ih)^{p-2}}-\frac{\varphi'(1)}{(1-t+ih)^{p-2}}\right\}+$$

$$+\frac{1}{p-1}\left\{\frac{\varphi(-1)}{(-1-t+ih)^{p-1}}-\frac{\varphi(1)}{(1-t+ih)^{p-1}}\right\}; \tag{7.5}$$

$$\int_{-1}^{1}\frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{(\tau-t-ih)^p}=\frac{1}{(p-1)!}\int_{-1}^{1}\frac{\varphi^{(p-1)}(\tau)\,d\tau}{\tau-t-ih}+$$

$$+\frac{1!}{(p-1)!}\left\{\frac{\varphi^{(p-1)}(-1)}{-1-t-ih}-\frac{\varphi^{(p-1)}(1)}{1-t-ih}\right\}+$$

$$+\frac{2!}{(p-1)!}\left\{\frac{\varphi^{(p-2)}(-1)}{(-1-t-ih)^2}-\frac{\varphi^{(p-2)}(1)}{(1-t-ih)^2}\right\}+\cdots$$

$$\cdots+\frac{(p-4)!}{(p-1)!}\left\{\frac{\varphi''(-1)}{(-1-t-ih)^{p-3}}-\frac{\varphi''(1)}{(1-t-ih)^{p-3}}\right\}+$$

$$+\frac{(p-3)!}{(p-1)!}\left\{\frac{\varphi'(-1)}{(-1-t-ih)^{p-2}}-\frac{\varphi'(1)}{(1-t-ih)^{p-2}}\right\}+$$

$$+\frac{1}{p-1}\left\{\frac{\varphi(-1)}{(-1-t-ih)^{p-1}}-\frac{\varphi(1)}{(1-t-ih)^{p-1}}\right\}. \tag{7.6}$$

Погрешность квадратурной формулы (7.2) оценивается неравенством

$$|R_N(\varphi)| \le$$

$$\le \left| \int\limits_{-1}^{1} \frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{(\tau-t)^p} - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N-1} \tilde{\varphi}(t'_k)\left[\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \left(\frac{1}{[\tau-(t-ih)]^p} + \frac{1}{[\tau-(t+ih)]^p}\right) d\tau\right]\right| \le$$

$$\le \left| \int\limits_{-1}^{1} \frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{(\tau-t)^p} - \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1} \frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{(\tau-t+ih)^p} - \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1} \frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{(\tau-t+ih)^p}\right| +$$

$$+\frac{1}{2}\left| \int\limits_{-1}^{1} \frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{(\tau-t+ih)^p} + \int\limits_{-1}^{1} \frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{(\tau-t-ih)^p} -\right.$$

$$\left. - \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{\varphi}(t'_k)\left[\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \left(\frac{1}{[\tau-(t-ih)]^p} + \frac{1}{[\tau-(t+ih)]^p}\right)\, d\tau\right]\right| \le$$

$$\le \left| \int\limits_{-1}^{1} \frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{(\tau-t)^p} - \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1} \frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{(\tau-t+ih)^p} - \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1} \frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{(\tau-t-ih)^p}\right| +$$

$$+\frac{1}{2}\left| \int\limits_{-1}^{1} \frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{(\tau-t+ih)^p} - \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{\varphi}(t'_k)\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{d\tau}{[\tau-(t+ih)]^p}\right| +$$

$$+\frac{1}{2}\left| \int\limits_{-1}^{1} \frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{(\tau-t-ih)^p} - \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{\varphi}(t'_k)\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{d\tau}{[\tau-(t-ih)]^p}\right| \le$$

$$\le \left| \int\limits_{-1}^{1} \frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{(\tau-t)^p} - \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1} \frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{(\tau-t+ih)^p} - \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1} \frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{(\tau-t-ih)^p}\right| +$$

$$+\frac{1}{2}\left| \sum_{k=0}^{N-1} \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{\varphi(\tau)-\varphi(t'_k)}{(\tau-t+ih)^p}\,d\tau\right| + \frac{1}{2}\left| \sum_{k=0}^{N-1} \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{\varphi(\tau)-\varphi(t'_k)}{(\tau-t-ih)^p}\,d\tau\right| +$$

$$+\frac{1}{2}\left| \sum_{k=0}^{N-1} \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{\varphi(t'_k)-\tilde{\varphi}(t'_k)}{(\tau-t+ih)^p}\,d\tau\right| + \frac{1}{2}\left| \sum_{k=0}^{N-1} \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{\varphi(t'_k)-\tilde{\varphi}(t'_k)}{(\tau-t-ih)^p}\,d\tau\right| =$$

$$= r_1 + r_2 + r_3 + r_4 + r_5.$$

Оценим каждое слагаемое в отдельности. Из формул (7.4) – (7.6) следует, что $r_1 \le r_1^0 + r_1^1 + r_1^2 + \ldots + r_1^{p-1}$, где

$$r_1^0 = \frac{1}{(p-1)!}\left[\int\limits_{-1}^{1} \left(\frac{\varphi^{(p-1)}(\tau)}{\tau-t} - \frac{1}{2}\left(\frac{\varphi^{(p-1)}(\tau)}{\tau-t+ih} - \frac{\varphi^{(p-1)}(\tau)}{\tau-t-ih}\right) d\tau\right)\right] = O(h).$$

Докажем справедливость этого равенства. Пусть $\varphi \in W^p(1)$. Тогда

$$r_1^0 \leq \frac{1}{(p-1)!}\left|\int\limits_{-1}^{1} \frac{\varphi^{(p-1)}(\tau)h^2\,d\tau}{(\tau-t)((\tau-t)^2+h^2)}\right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{(p-1)!}\left|\int\limits_{-1}^{1} \frac{(\varphi^{(p-1)}(\tau)-\varphi^{(p-1)}(t))h^2\,d\tau}{(\tau-t)((\tau-t)^2+h^2)}\right| +$$

$$+\left|\frac{\varphi^{(p-1)}(t)}{(p-1)!}\int\limits_{-1}^{1} \frac{h^2\,d\tau}{(\tau-t)((\tau-t)^2+h^2)}\right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{(p-1)!}\max_{-1\leq t\leq 1}|\varphi^{(p)}(t)|\left|\int\limits_{-1}^{1} \frac{h^2\,d\tau}{(\tau-t)^2+h^2}\right| +$$

$$+\frac{1}{(p-1)!}\max_{-1\leq t\leq 1}|\varphi^{(p-1)}(t)|\left|\int\limits_{-1}^{1} \frac{h^2\,d\tau}{(\tau-t)((\tau-t)^2+h^2)}\right|.$$

Первое слагаемое равно $O(h)$. Второе оценивается следующим образом. Пусть $\Delta^* = \min(|1-t|, |1+t|)$ и пусть $\Delta^* = t+1$. Тогда

$$\left|\int\limits_{-1}^{1} \frac{h^2\,d\tau}{(\tau-t)((\tau-t)^2+h^2)}\right| =$$

$$= \left|\int\limits_{t-\Delta^*}^{t+\Delta^*} \frac{h^2\,d\tau}{(\tau-t)((\tau-t)^2+h^2)} + \int\limits_{t+\Delta^*}^{1} \frac{h^2\,d\tau}{(\tau-t)((\tau-t)^2+h^2)}\right| =$$

$$= \left|\int\limits_{t+\Delta^*}^{1} \frac{h^2\,d\tau}{(\tau-t)((\tau-t)^2+h^2)}\right| \leq A\frac{h^2}{(\Delta^*)^3}.$$

Следовательно, при $h \leq \Delta^3$, $r_1^0 = O(h)$.

Можно показать, что

$$r_1^1 = \frac{2!}{(p-1)!}\left|\frac{\varphi^{(p-1)}(-1)}{-1-t} - \frac{1}{2}\left[\frac{\varphi^{(p-1)}(-1)}{-1-t-ih} + \frac{\varphi^{(p-1)}(-1)}{-1-t+ih}\right]\right| = O(\frac{h}{\Delta^2});$$

$$r_1^2 = \frac{3!}{(p-1)!}\left|\frac{\varphi^{(p-2)}(-1)}{(-1-t)^2} - \frac{1}{2}\left[\frac{\varphi^{(p-2)}(-1)}{(-1-t-ih)^2} + \frac{\varphi^{(p-2)}(-1)}{(-1-t+ih)^2}\right]\right| =$$

$$= O(h/\Delta^3);$$

. . . .

$$r_1^{p-1} = \frac{1}{p-1}\left|\frac{\varphi(-1)}{(-1-t)^{p-1}} - \frac{1}{2}\left[\frac{\varphi(-1)}{(-1-t-ih)^{p-1}} + \frac{\varphi(-1)}{(-1-t+ih)^{p-1}}\right]\right| =$$

$$= O(\frac{h}{\Delta^p}).$$

Мы не останавливаемся на оценках выражений $r_1^1, \dots, r_1^{p-2}$, так как их справедливость следует из оценки выражения r_1^{p-1}. Докажем справедливость последнего равенства. Очевидно,

$$r_1^{p-1} \le A\left|\frac{1}{(1+t+i\Theta h)^p}\right| h \le A\frac{h}{\Delta^p}.$$

Из приведенных выше неравенств следует, что $r_1 \le Ah/\Delta^p$.

Слагаемые r_4 и r_5 оцениваются по аналогии с соответствующими выражениями из раздела 6. Повторяя сделанные там выкладки, имеем:

$$r_4 + r_5 \le A\varepsilon/h^{p-1}.$$

Слагамые r_2, r_3 оцениваются одинаково. Поэтому ограничимся рассмотрением суммы r_2 при $t \in [t_j, t_{j+1})$

$$r_2 = \frac{1}{2}\left|\sum_{k=0}^{N-1}\int_{t_k}^{t_{k+1}}\frac{|\varphi(\tau) - \varphi(t'_k)|}{|\tau - t + ih|^p}\,d\tau\right| \le$$

$$\le \frac{1}{4N^2}\sum_{k=0}^{j-2}\frac{1}{((t_{k+1}-t_j)^2 + h^2)^{p/2}} + \frac{1}{4N^2h^p} +$$

$$+\frac{1}{4N^2}\sum_{k=j+1}^{N-1}\frac{1}{((t_k - t_{j+1})^2 + h^2)^{p/2}} \le A\left(\frac{1}{N^2h^p} + \frac{1}{Nh^{p-1}}\right).$$

Оценка сумм, встречающихся в предыдущем выражении, проводилась следующим образом:

$$\frac{1}{N^2}\sum_{k=0}^{j-2}\frac{1}{[(t_{k+1}-t_j)^2 + h^2]^{p/2}} = N^{p-2}\sum_{k=0}^{j-2}\frac{1}{[(k+1-j)^2 + N^2h^2]^{p/2}} =$$

$$= N^{p-2}{\sum_{k=0}^{j-2}}'\frac{1}{[(k+1-j)^2 + N^2h^2]^{p/2}} + N^{p-2}{\sum_{k=0}^{j-2}}''\frac{1}{[(k+1-j)^2 + N^2h^2]^{p/2}} =$$

$$= r_2^1 + r_2^2,$$

где $\sum'$ означает суммирование по таким k, что $j-k<Nh$, а $\sum''$ означает суммирование по остальным значениям k. Очевидно,

$$r_2^1 \leq AN^{p-2} \sum_{k=j-[Nh]}^{j} \frac{1}{N^p h^p} \leq \frac{A}{N} h^{1-p};$$

$$r_2^2 \leq AN^{p-2} \sum_{k=0}^{j-[Nh]} \frac{1}{(j-k)^p} \leq AN^{p-2}(Nh)^{1-p} = \frac{Ah^{1-p}}{N}.$$

Из полученных неравенств следует оценка r_2.

Аналогичным образом оценивается r_3. Оценки слагаемых r_4 и r_5 проводятся по такой же схеме, что и оценки слагаемых r_2 и r_3. Можно показать, что

$$|r_4| \asymp |r_5| \asymp \varepsilon/h^{p-1}.$$

Собирая полученные оценки, имеем $|R_N(\varphi)| \leq A(h/\Delta^p + N^{-2}h^{-p} + + N^{-1}h^{1-p} + \varepsilon/h^{p-1})$, $0<q<1/4$. Полагая $h = N^{-1/p}$, получаем окончательную оценку $|R_N(\varphi)| \leq A(N^{-1/p}/\Delta^p + \varepsilon N^{1-1/p})$.

Отсюда следует, что

$$R_N[W^r(1)] \leq A(\frac{1}{N^{1/p}\Delta^p} + \varepsilon N^{1-1/p}).$$

Теорема доказана.

8. Эффективный метод вычисления интегралов Адамара на бесконечном интервале

Будем вычислять интегралы вида

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{(\tau-t)^p} \tag{8.1}$$

в предположении, что $\varphi(t)$ представима в виде $\varphi(t) = \rho(t)\psi(t)$, где $\rho(t)$ – весовая функция.

В качестве весовых используются функции

$$\rho_1(t) = a^{|t|}, \quad \rho_2(t) = e^{-t^2}, \quad \rho_3(t) = 1/(1+t^2)^\alpha, \quad \alpha > 1/2.$$

Через $W^r(1,K)$ обозначим класс функций $\varphi(t)$, определенных на числовой оси, имеющих непрерывные производные до $(r-1)$-го порядка включительно, кусочно-непрерывные производные r-го порядка и удовлетворяющих условиям $\max|\varphi^{(r)}(t)| \le 1$, $\max(|\varphi(t)|, \ |\varphi'(t)|, \ \dots, |\varphi^{(r-1)}(t)|) \le K$. Будем говорить, что $\varphi(t) \in W^r_\rho(1,K)$, если $\varphi(t) = \rho(t)\psi(t)$, где $\rho(t)$ – весовая функция, а $\psi(t) \in W^r(1,K)$.

Введем обозначения: N – целое число;

$$t'_{k,l} = k+\frac{l}{N_k^1},\ k=-A_1,\dots,-1,0,1,\dots,A_1,\ l=0,1,\dots,N_k^1,\ A_1=[\log_a N],$$

$$N_k^1 = [N/a^k] \text{ при } k=0,1,\dots,A_1, N_k^1 = \left[N/a^{|k|-1}\right] \text{ при } k=-A_1,\dots,-1;$$

$$t^2_{k,l} = k+\frac{l}{N_k^2},\ k=-A_2,\dots,-1,0,1,\dots,A_2,\ l=0,1,\dots,N_k^2,$$

$$A_2 = [(\ln N)^{1/2}], N_k^2 = \left[N/e^{k^2}\right] \text{ при } k\ge 0, N_k^2 = [N/e^{(|k|-1)^2}] \text{ при } k<0;$$

$$t^3_{k,l} = k+l/N_k^3,\ k=-A_3,\dots,-1,0,1,\dots,A_3,\ l=0,1,\dots,N_k^3,$$

$$A_3 = \left[(N/\ln N)^{1/(2\alpha-1)}\right],\ N_k^3 = \left[N/k^{2\alpha-1}\right] \text{ при } k\ne 0,\ N_0^3 = N;$$

$$\bar t_{k,l} = (t_{k,l}+t_{k,l+1})/2,\ \alpha>0.$$

Теорема 8.1 [24]. Пусть $\varphi \in W^r_{\rho_i}(1,K), i = 1,2,3$. Квадратурная формула

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{(\tau-t)^p} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N-1}\varphi(t'_k)\left[\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}}\left(\frac{1}{[\tau-(t-ih)]^p}+\frac{1}{[\tau-(t+ih)]^p}\right)d\tau\right]+$$
$$+R_N(\varphi), \tag{8.2}$$

предназначенная для вычисления интеграла Адамара (8.1), имеет погрешность $|R_N(\varphi)| \le O(N^{-1/p})$.

Доказательство. Оценка погрешности квадратурной формулы (8.2) проводится по формуле

$$|R_N(\varphi)| \le \left|\int\limits_{-\infty}^{-A}\frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{(\tau-t)^p}\right| + \left|\int\limits_{A}^{\infty}\frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{(\tau-t)^p}\right| + \left|\int\limits_{-A}^{A}\frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{(\tau-t)^p}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N-1}\varphi(t'_k)\left[\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}}\left(\frac{1}{[\tau-(t-ih)]^p}+\frac{1}{[\tau-(t+ih)]^p}\right)d\tau\right]\right| = r_1+r_2+r_3.$$

Оценка первых двух слагаемых r_1+r_2 проведена в разделе 6, где показано, что $r_1+r_2 = O(N^{-1/p})$. Третье слагаемое r_3 можно оценить по аналогии с рассуждениями, проведенными в разделе 7, так как интервал $[-A, A]$ конечный. Нетрудно видеть, что $r_3 = O(N^{-1/p})$.

Замечание. Эта оценка отличается от приведенной в разделе 7 за счет влияния весовых множителей.

Объединяя эти оценки, убеждаемся в справедливости теоремы 8.1.

9. Весовые квадратурные формулы для интегралов Адамара

Построим оптимальные по порядку весовые квадратурные формулы на классе функций $W^r(1)$ для вычисления интеграла

$$A\varphi = \int\limits_0^1 \frac{p(\tau)\varphi(\tau)}{(\tau - t)^p}\, d\tau. \tag{9.1}$$

Для простоты полагаем, что весовая функция $p(\tau) = \tau^{-\gamma}$, $0 < \gamma < 1$.

Обозначим через $P_r(\varphi, [-1, 1])$ интерполяционный полином степени $r-1$, интерполирующий функцию $\varphi(t)$ по r равноотстоящим узлам. Через $P_r(\varphi; [s_k, s_{k+1}])$ обозначим трансформацию полинома $P_r(\varphi, [-1, 1])$ в полином $P_r(\varphi; [s_k, s_{k+1}])$ при линейном отображении сегмента $[-1, 1]$ на $[s_k, s_{k+1}]$.

Теорема 9.1 [24]. Пусть $\Psi = W^r(1)$. Среди всевозможных квадратурных формул вида

$$\int\limits_0^1 \frac{p(\tau)\varphi(\tau)}{(\tau - t)^p}\, d\tau = \sum_{k=1}^{N} \sum_{l=0}^{\rho} p_{kl}(t)\varphi^{(l)}(t_k) + R_N(t, p_{kl}, t_k, \varphi) \tag{9.2}$$

оптимальной по порядку при $t \in [s_j, s_{j+1})$, $j = 1, 2, \ldots, N-2$, является формула

$$A\varphi = \sum_{k=0}^{j-2} \int\limits_{s_k}^{s_{k+1}} \frac{P_r(\varphi; [s_k, s_{k+1}])}{\tau^\gamma(\tau - t)^p}\, d\tau + \sum_{k=j+2}^{N-1} \int\limits_{s_k}^{s_{k+1}} \frac{P_r(\varphi; [s_k, s_{k+1}])}{\tau^\gamma(\tau - t)^p}\, d\tau +$$

$$+ \int\limits_{s_{j-1}}^{s_{j+2}} \frac{P_r(\varphi; [s_{j-1}, s_{j+2}])}{\tau^\gamma(\tau - t)^p}\, d\tau + R_N(\varphi), \tag{9.3}$$

где $s_k = (k/N)^{r/(r-\gamma)}$; $k = 0, 1, \ldots, N$. Ее погрешность при $t \in [s_2, s_{N-2}]$ оценивается неравенством $|R_N(\Psi)| \le AN^{-\nu(r+1-p-\gamma)}$, где $\nu = r/(r-\gamma)$.

Доказательство. Найдем оценку снизу величины $\zeta[W^r(1)]$ при $r \ge$ $\ge p$. Разобьем сегмент $[0, 1]$ на $2N+2$ частей точками $v_k = (k/(2N+2))^\nu$

($k = 0, 1, \ldots, 2N + 2$, $\nu = r/(r - \gamma)$). Поскольку квадратурная формула (9.2) имеет N узлов, то, по крайней мере, в $N + 2$ интервалах $\Delta_k = (v_k, v_{k+1})$ будут отсутствовать узлы квадратурной формулы. Эти интервалы, как и в предыдущих разделах, называются отмеченными. В первой части книги (см. с. 169) показано, что начиная с номера $\bar{k} \leq$ $\leq 3(N+1)/2$, отношение числа отмеченных интервалов среди интервалов $\Delta_k, \Delta_{k+1}, \ldots, \Delta_{k+l}$ к общему числу этих интервалов больше или равно 1/3. Положим $t = v_{\bar{k}}$ и построим функцию $\varphi^*(\tau)$, равную нулю в неотмеченных интервалах и в отмеченных интервалах Δ_k при $k < \bar{k}$. В отмеченных интервалах при $k \geq \bar{k}$ $\varphi^*(\tau) = A(\tau - v_k)^r (v_{k+1} - \tau)^r (v_{k+1} - v_k)^{-r}$. Константа A выбирается из требования, чтобы $\varphi^*(\tau) \in W^r(1)$. Тогда

$$\zeta_N[W^r(1)] \geq \int\limits_0^1 \frac{\varphi(\tau)\, d\tau}{\tau^\gamma (\tau - t)^p} \geq \sum_{k=\bar{k}}^{2N+1}{}' \int\limits_{v_k}^{v_{k+1}} \frac{\varphi(\tau)\, d\tau}{\tau^\gamma (\tau - t)^p} = \frac{A}{N^{r(r+1-p-\gamma)/(r-\gamma)}}.$$

Здесь $\sum'$ означает суммирование по отмеченным интервалам.

Оценка снизу получена.

Оценим погрешность квадратурной формулы (9.3). Нетрудно видеть, что

$$|R_N(\varphi)| \leq \sum_{k=0}^{j-1} \Big| \int\limits_{s_k}^{s_{k+1}} \frac{\varphi(\tau) - P_r(\varphi; [s_k, s_{k+1}])}{\tau^\gamma (\tau - t)^p}\, d\tau \Big| +$$

$$+ \sum_{k=j+2}^{N-1} \Big| \int\limits_{s_k}^{s_{k+1}} \frac{\varphi(\tau) - P_r(\varphi; [s_k, s_{k+1}])}{\tau^\gamma (\tau - t)^p}\, d\tau \Big| +$$

$$+ \Big| \int\limits_{s_{j-1}}^{s_{j+2}} \frac{\varphi(\tau) - P_r(\varphi; [s_{j-1}, s_{j+2}])}{\tau^\gamma (\tau - t)^p}\, d\tau \Big| = r_1 + r_2 + r_3. \qquad (9.4)$$

Оценим каждое слагаемое в отдельности:

$$r_1 \leq A \sum_{k=1}^{j-1} (s_{k+1} - s_k)^{r+1} \left(\frac{N}{k}\right)^{\nu\gamma} \frac{N^{vp}}{|(k+1)^\nu - (j)^\nu|^p} +$$

$$+ A \left(\frac{1}{N}\right)^{\nu(1-\gamma)} \frac{(s_1 - s_0)^r}{[(j/N)^\nu - (1/N)^\nu]^p} \leq \frac{A}{N^{\nu(r+1-p-\gamma)}}. \qquad (9.5)$$

Аналогичным образом оценивается r_2

$$r_2 \leq \sum_{k=j}^{N-1} \Big| \int\limits_{s_k}^{s_{k+1}} \frac{\varphi(\tau) - P_r(\varphi; [s_k, s_{k+1}])}{\tau^\gamma (\tau - t)^p}\, d\tau \Big| \leq \frac{A}{N^{\nu(r+1-p-\gamma)}}. \qquad (9.6)$$

Оценим r_3. При этом воспользуемся определением интеграла в смысле главного значения Коши $-$ Адамара

$$r_3 = |\int\limits_{s_{j-1}}^{s_{j+2}} \frac{\varphi(\tau) - P_r(\varphi; [s_{j-1}, s_{j+2}])}{\tau^\gamma (\tau - t)^p} \, d\tau| = |\int\limits_{s_{j-1}}^{s_{j+2}} \frac{g(\tau)\, d\tau}{(\tau - t)^p}| =$$

$$= \sum_{k=0}^{p-2} |A_k \frac{g^{(k)}(s_{j-1})}{(t - s_{j-1})^{p-1-k}} + B_k \frac{g^{(k)}(s_{j+2})}{(s_{j+2} - t)^{p-1-k}}| + C|\int\limits_{s_{j-1}}^{s_{j+2}} \frac{g^{(p-1)}(\tau)\, d\tau}{\tau - t}|,$$

где $g(\tau) = (\varphi(\tau) - P_r(\varphi; [s_k, s_{k+1}]))\tau^{-\gamma}$.

Пользуясь неравенством А. А. Маркова (см. теорему 3.8 в главе 1 первой части книги), имеем: $\|g^{(k)}(t)\|_{C_{[s_{j-1}, s_{j+2}]}} \leq AN^{-\nu(r-k-\gamma)} j^{-k\gamma/(r-\gamma)}$.

Поэтому

$$\left| \frac{g^{(k)}(s_{j-1})}{(t - s_{j-1})^{p-1-k}} \right| \leq \frac{A}{N^{\nu(r+1-p-\gamma)}}.$$

Осталось оценить величину интеграла $|\int\limits_{s_{j-1}}^{s_{j+2}} \frac{g^{(p-1)}(\tau)}{\tau - t} \, d\tau|$. Обозначим через Δ величину $\Delta = \min(t - s_{j-1}, s_{j+2} - t)$. Для определенности положим $\Delta = t - s_{j-1}$. Тогда

$$|\int\limits_{s_{j-1}}^{s_{j+2}} \frac{g^{(p-1)}(\tau)}{\tau - t} \, d\tau| \leq |\int\limits_{t-\Delta}^{t+\Delta} \frac{g^{(p-1)}(\tau)}{\tau - t} \, d\tau| +$$

$$+ |\int\limits_{t+\Delta}^{s_{j+2}} \frac{g^{(p-1)}(\tau)}{\tau - t} \, d\tau| = |\int\limits_{t-\Delta}^{t+\Delta} \frac{g^{(p-1)}(\tau) - g^{(p-1)}(t)}{\tau - t} \, d\tau| +$$

$$+ |\int\limits_{t+\Delta}^{s_{j+2}} \frac{g^{(p-1)}(\tau)}{\tau - t} \, d\tau| \leq A \left(\|g^{(p)}(t)\|_{C_{[t-\Delta, t+\Delta]}} \Delta + \|g^{(p-1)}(t)\|_{C_{[t+\Delta, s_{j+2}]}} \right) \leq$$

$$\leq \frac{A}{N^{\nu(r+1-p-\gamma)}}. \tag{9.7}$$

Собирая вместе оценки (9.5) $-$ (9.7), имеем: $R_N[\Psi] \leq AN^{-\nu(r+1-p-\gamma)}$.

Теорема доказана.

Распространение результатов этого параграфа на гиперсингулярные интегралы вида

$$H\varphi = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{p(\tau)\varphi(\tau)}{(\tau - t)^p} d\tau,$$

где $p(t) = e^{\lambda|t|}/(1 + |t|)^s$, дано в работах Ю. Ф. Захаровой [48] $-$ [51].

Глава 4

КУБАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ БИГИПЕРСИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

1. Оптимальные кубатурные формулы вычисления бигиперсингулярных интегралов от периодических функций

Рассмотрим интеграл

$$I\varphi = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{\varphi(\sigma_1, \sigma_2)\, d\sigma_1\, d\sigma_2}{\sin^{p_1}\frac{\sigma_1 - s_1}{2}\sin^{p_2}\frac{\sigma_2 - s_2}{2}}, \quad p_1, p_2 = 2, 3, \ldots, \tag{1.1}$$

для вычисления которого применим кубатурную формулу

$$I\varphi = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} p_{ki}(s_1, s_2)\varphi(x_k, y_i) + R_{mn}(s_1, s_2, x_k, y_i, p_{kl}, \varphi), \tag{1.2}$$

определяемую вектором $(X, Y; P)$ с произвольными узлами

$$0 \le x_1 < x_2 < \ldots < x_n \le 2\pi; \quad 0 \le y_1 < y_2 < \ldots < y_m \le 2\pi$$

и коэффициентами p_{ki}. Положим $\varphi(\sigma_1, \sigma_2) \in \overline{W}^{r_1, r_2}(1)$.

Отметим, что, как и в случае одномерных гиперсингулярных интегралов (см. раздел 3 предыдущей главы), к интегралам вида (1.1) заменой переменных сводятся интегралы вида

$$\int\limits_{\gamma_1}\int\limits_{\gamma_2} \frac{\varphi(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2}{(\tau_1 - t_1)(\tau_2 - t_2)}$$

по единичным окружностям γ_1, γ_2.

Теорема 1.1. Пусть $\Psi \in \overline{W}^{r_1 r_2}(1)$ и интеграл (1.1) вычисляется по кубатурной формуле (1.2) . Тогда если $p_1,\ p_2-$ четные целые числа, то

$$\zeta_{nm}[\Psi] \ge \frac{4(1 + o(1))}{nm(p_1 - 1)(p_2 - 1)2^{p_1 + p_2 - 2}} \left(\frac{n}{\pi}\right)^{p_1} \left(\frac{m}{\pi}\right)^{p_2} \times$$

$$\times \left(\frac{2K_{r_1}\pi}{n^{r_1}} + \frac{K_{r_2}\pi}{m^{r_2}} + \frac{4K_{r_1}K_{r_2}\pi^2}{n^{r_1}m^{r_2}}\right).$$

При остальных сочетаниях p_1 и p_2 $\zeta_{nm}[\Psi] \ge A(\frac{m^{p_2 - 1}}{n^{r_1 - p_1 + 1}} + \frac{n^{p_1 - 1}}{m^{r_2 - p_2 + 1}})$.

Среди всевозможных кубатурных формул, использующих подынтегральную функцию в $N = nm$ узлах, оптимальной по порядку является кубатурная формула

$$I\varphi = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{s_{nm}[\varphi(\sigma_1,\sigma_2)]\,d\sigma_1\,d\sigma_2}{\sin^{p_1}\frac{\sigma_1-s_1}{2}\sin^{p_2}\frac{\sigma_2-s_2}{2}} + R_N(\varphi), \tag{1.3}$$

где $s_{nm}[\varphi] = s_n^{\sigma_1}[s_m^{\sigma_2}[\varphi]]$, $s_n[\varphi] \in C^{r_1}$ $(s_m[\varphi] \in C^{r_2})$ — интерполяционный сплайн порядка r_1 (r_2) по равномерному разбиению $v_k = 2k\pi/n$, $k = 0,1,\ldots,n$ $(w_k = 2k\pi/m,\ k = 0,1,\ldots,m)$. Погрешность кубатурной формулы определяется равенством $R_N[\Psi] = O(n^{p_1-1}m^{p_2-1}(n^{-r_1}+m^{-r_2}))$.

Доказательство. Вначале получим оценку снизу погрешности кубатурной формулы (1.2) на классе $\overline{W}^{r_1r_2}(1)$ на произвольном векторе $(X,Y;P)$ узлов и весов.

Обозначим через $\varphi^*(\sigma_1,\sigma_2)$ функцию, удовлетворяющую следующим условиям:

1) $\varphi^*(\sigma_1,\sigma_2) \in \overline{W}^{r_1,r_2}(1)$;

2) $\min\varphi^*(\sigma_1,\sigma_2) = \varphi^*(x_k,y_j) = 0$ $(k = 1,2,\ldots,n;\ j = 1,2,\ldots,m)$;

3) $\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \varphi^*(\sigma_1,\sigma_2)\,d\sigma_1 d\sigma_2 \geq \frac{2K_{r_1}\pi}{n^{r_1}} + \frac{K_{r_2}\pi}{m^{r_2}} + \frac{4K_{r_1}K_{r_2}\pi^2}{n^{r_1}m^{r_2}}$.

Покажем, что такая функция существует. В работе В. П. Моторного [60] показано, что на любом множестве узлов s_k, $k = 1,2,\ldots,N$, существует неотрицательная функция $\varphi(t) \in \tilde{W}^r(1)$, удовлетворяющая двум условиям:

1) $\varphi(s_k) = 0$, $k = 1,2,\ldots,N$;

2) $\int\limits_0^{2\pi} \varphi(t)\,dt \geq \frac{K_r}{n^r}$.

Определим функцию $\varphi^*(\sigma_1,\sigma_2)$, о которой речь шла выше, формулой $\varphi^*(\sigma_1,\sigma_2) = (\varphi_1(\sigma_1) + \varphi_2(\sigma_2) + \varphi_1(\sigma_1)\varphi_2(\sigma_2))/A$, где $\varphi_1(\sigma_1) \in W^{r_1}(1)-$ неотрицательная функция, обращающаяся в нуль в узлах x_k, $k = 1,2,\ldots,n$; $\varphi_2(\sigma_2) \in W^{r_2}(1)-$ неотрицательная функция, обращающаяся в нуль в узлах y_j, $j = 1,2,\ldots,m$; A – константа, подбираемая из условия, чтобы $\varphi^*(\sigma_1,\sigma_2) \in \overline{W}^{r_1r_2}(1)$. Отметим, что здесь речь идет о функциях, существование которых доказано в работе В. П. Моторного [60] и для которых выполнены условия 1), 2). Нетрудно видеть, что при каждом фиксированном наборе (n,m) такая константа A существует и $A \leq 1 + K_r/N^r$, где $N = \min(n,m)$.

Введем узлы $v_k = 2k\pi/n$ и $w_k = 2k\pi/m$ и построим прямоугольники

$[v_k, v_{k+1}; w_j, w_{j+1}]$. Возьмем произвольную точку (v_k, w_j) и представим интеграл $I\varphi^*$ в виде суммы

$$I\varphi^*(v_k, w_j) = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \varphi^*(\sigma_1, \sigma_2) \frac{1}{\sin^{p_1}\frac{\sigma_1 - v_k}{2}\sin^{p_2}\frac{\sigma_2 - w_j}{2}}\, d\sigma_1\, d\sigma_2 \geq$$

$$\geq \sum_{l=1}^{[n/2]-1} \int\limits_{v_{k-l-1}}^{v_{k-l}} \int\limits_0^{2\pi} \varphi^*(\sigma_1, \sigma_2) \frac{1}{\sin^{p_1}\frac{\sigma_1 - v_k}{2}\sin^{p_2}\frac{\sigma_2 - w_j}{2}}\, d\sigma_1\, d\sigma_2 +$$

$$+ \sum_{l=1}^{[n/2]-1} \int\limits_{v_{k+l}}^{v_{k+l+1}} \int\limits_0^{2\pi} \varphi^*(\sigma_1, \sigma_2) \frac{1}{\sin^{p_1}\frac{\sigma_1 - v_k}{2}\sin^{p_2}\frac{\sigma_2 - w_j}{2}}\, d\sigma_1\, d\sigma_2 \geq$$

$$\geq \sum_{l=1}^{[n/2]-1} \int\limits_{v_{k-l-1}}^{v_{k-l}} \sum_{i=1}^{[m/2]-1} \int\limits_{w_{j-i-1}}^{w_{j-i}} \frac{\varphi^*(\sigma_1, \sigma_2)}{\sin^{p_1}\frac{\sigma_1 - v_k}{2}\sin^{p_2}\frac{\sigma_2 - w_j}{2}}\, d\sigma_1\, d\sigma_2 +$$

$$+ \sum_{l=1}^{[n/2]-1} \int\limits_{v_{k-l-1}}^{v_{k-l}} \sum_{i=1}^{[m/2]-1} \int\limits_{w_{j+i}}^{w_{j+i+1}} \frac{\varphi^*(\sigma_1, \sigma_2)}{\sin^{p_1}\frac{\sigma_1 - v_k}{2}\sin^{p_2}\frac{\sigma_2 - w_j}{2}}\, d\sigma_1\, d\sigma_2 +$$

$$+ \sum_{l=1}^{[n/2]-1} \int\limits_{v_{k+l}}^{v_{k+l+1}} \sum_{i=1}^{[m/2]-1} \int\limits_{w_{j-i-1}}^{w_{j-i}} \frac{\varphi^*(\sigma_1, \sigma_2)}{\sin^{p_1}\frac{\sigma_1 - v_k}{2}\sin^{p_2}\frac{\sigma_2 - w_j}{2}}\, d\sigma_1\, d\sigma_2 +$$

$$+ \sum_{l=1}^{[n/2]-1} \int\limits_{v_{k+l}}^{v_{k+l+1}} \sum_{i=1}^{[m/2]-1} \int\limits_{w_{j+i}}^{w_{j+i+1}} \frac{\varphi^*(\sigma_1, \sigma_2)}{\sin^{p_1}\frac{\sigma_1 - v_k}{2}\sin^{p_2}\frac{\sigma_2 - w_j}{2}}\, d\sigma_1\, d\sigma_2 \geq$$

$$\geq \sum_{l=1}^{[n/2]-1} \sum_{i=1}^{[m/2]-1} \left(\sin^{p_1}\frac{v_l}{2}\sin^{p_2}\frac{w_i}{2}\right)^{-1} \Bigg(\int\limits_{v_{k-l-1}}^{v_{k-l}} \int\limits_{w_{j-i-1}}^{w_{j-i}} \varphi^*(\sigma_1, \sigma_2)\, d\sigma_1\, d\sigma_2 +$$

$$+ \int\limits_{v_{k-l-1}}^{v_{k-l}} \int\limits_{w_{j+i}}^{w_{j+i+1}} \varphi^*(\sigma_1, \sigma_2)\, d\sigma_1\, d\sigma_2 + \int\limits_{v_{k+l}}^{v_{k+l+1}} \int\limits_{w_{j-i-1}}^{w_{j-i}} \varphi^*(\sigma_1, \sigma_2)\, d\sigma_1\, d\sigma_2 +$$

$$+ \int\limits_{v_{k+l}}^{v_{k+l+1}} \int\limits_{w_{j+i}}^{w_{j+i+1}} \varphi^*(\sigma_1, \sigma_2)\, d\sigma_1\, d\sigma_2 \Bigg).$$

Поскольку максимальное значение функции $I\varphi^*(\sigma_1, \sigma_2)$ не меньше ее среднего значения, то

$$\max I\varphi^*(s_1, s_2) \geq \frac{1}{nm} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} I\varphi^*(v_j, w_k).$$

Усредним интеграл

$$I\varphi^*(s_1, s_2) = \frac{1}{nm} \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \sum_{l=1}^{[n/2]-1} \sum_{i=1}^{[m/2]-1} \frac{1}{\sin^{p_1}\frac{v_l}{2}\sin^{p_2}\frac{w_i}{2}} \times$$

$$\times \left(\int\limits_{v_{k-l-1}}^{v_{k-l}} \int\limits_{w_{j-i-1}}^{w_{j-i}} \varphi^*(\sigma_1, \sigma_2)\, d\sigma_1\, d\sigma_2 + \int\limits_{v_{k-l-1}}^{v_{k-l}} \int\limits_{w_{j+i}}^{w_{j+i+1}} \varphi^*(\sigma_1, \sigma_2)\, d\sigma_1\, d\sigma_2 + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{v_{k+l}}^{v_{k+l+1}} \int\limits_{w_{j-i-1}}^{w_{j-i}} \varphi^*(\sigma_1, \sigma_2)\, d\sigma_1\, d\sigma_2 + \int\limits_{v_{k+l}}^{v_{k+l+1}} \int\limits_{w_{j+i}}^{w_{j+i+1}} \varphi^*(\sigma_1, \sigma_2)\, d\sigma_1\, d\sigma_2 \right) =$$

$$= \frac{1}{nm} \sum_{l=1}^{[n/2]-1} \sum_{i=1}^{[m/2]-1} \frac{1}{\sin^{p_1} \frac{v_l}{2} \sin^{p_2} \frac{w_i}{2}} \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \left(\int\limits_{v_{k-l-1}}^{v_{k-l}} \int\limits_{w_{j-i-1}}^{w_{j-i}} \varphi^*\, d\sigma_1\, d\sigma_2 + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{v_{k-l-1}}^{v_{k-l}} \int\limits_{w_{j+i}}^{w_{j+i+1}} \varphi^*\, d\sigma_1\, d\sigma_2 + \int\limits_{v_{k+l}}^{v_{k+l+1}} \int\limits_{w_{j-i-1}}^{w_{j-i}} \varphi^*\, d\sigma_1\, d\sigma_2 + \int\limits_{v_{k+l}}^{v_{k+l+1}} \int\limits_{w_{j+i}}^{w_{j+i+1}} \varphi^*\, d\sigma_1\, d\sigma_2 \right) =$$

$$= \frac{4}{nm} \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \varphi^*(\sigma_1, \sigma_2)\, d\sigma_1\, d\sigma_2 \sum_{l=1}^{[n/2]-1} \frac{1}{\sin^{p_1} \frac{v_l}{2}} \sum_{i=1}^{[m/2]-1} \frac{1}{\sin^{p_2} \frac{w_i}{2}}.$$

Сумма

$$\sum_{l=1}^{n} \frac{1}{\sin^p \frac{v_l}{2}}$$

была оценена в разделе 3 предыдущей главы. Воспользовавшись этой оценкой, имеем:

$$\max I\varphi^*(s_1, s_2) \geq \frac{4(1+o(1))}{2^{p_1+p_2-2} nm} \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \varphi^*(\sigma_1, \sigma_2)\, d\sigma_1\, d\sigma_2 \frac{(n/\pi)^{p_1}}{p_1 - 1} \frac{(m/\pi)^{p_2}}{p_2 - 1} =$$

$$= \frac{1+o(1)}{2^{p_1+p_2-2}} \left(\frac{2K_{r_1}\pi}{n^{r_1}} + \frac{K_{r_2}\pi}{m^{r_2}} + \frac{4K_{r_1}K_{r_2}\pi^2}{n^{r_1} m^{r_2}} \right) \frac{4}{nm} \left(\frac{n}{\pi}\right)^{p_1} \frac{1}{p_1 - 1} \left(\frac{m}{\pi}\right)^{p_2} \frac{1}{p_2 - 1}.$$

Оценка снизу в случае четных p_1 и p_2 получена.

Рассмотрим случай, когда p_1 и p_2 не являются четными числами.

Введем узлы $v_k = 2k\pi/n_1, k = 0, 1, \ldots, n_1, w_l = 2l\pi/m_1, l = 0, 1, \ldots, m_1$, где для простоты дальнейших выкладок полагаем n_1, m_1 четными. Через u_{kl} обозначим узлы $u_{kl} = (v_k, w_l), k = 0, 1, \ldots n_1,\ l = 0, 1, \ldots, m_1$. Обозначим через $d_{ij},\ i = 1, 2, \ldots, 2n + 1, j = 1, 2, \ldots, 2m + 1$ объединение множества узлов кубатурной формулы (1.2) и узлов $u_{kl},\ k = 0, 1, \ldots, n$, $l = 0, 1, \ldots, m$.

Каждому узлу $u_{kl}, k = 0, 1, \ldots, n,\ l = 0, 1, \ldots, m$, поставим в соответствие функцию

$$\varphi^*_{kl}(\sigma_1, \sigma_2) =$$

$$= \begin{cases} 0, \quad (\sigma_1,\sigma_2)\in\Omega, \\ \varphi^*(\sigma_1,\sigma_2)\left(\operatorname{sgn}\sin^{p_1}\frac{\sigma_1-v_k}{2}\right)\left(\operatorname{sgn}\sin^{p_2}\frac{\sigma_2-w_l}{2}\right), (\sigma_1,\sigma_2)\in[0,2\pi]^2\setminus\Omega, \end{cases}$$

где $\Omega = \Big\{(\sigma_1,\sigma_2) : |\sigma_1 - v_k| \le \frac{2\pi}{n_1}, |\sigma_1 - v_{k+n_1/2}| \le \frac{2\pi}{n_1},\ \ |\sigma_2 - w_l| \le \frac{2\pi}{m_1},$ $|\sigma_2 - w_{l+m_1/2}| \le \frac{2\pi}{m_1}\Big\}.$

Тогда

$$I(\varphi^*)(v_k,w_l) = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{\varphi^*(\sigma_1,\sigma_2)d\sigma_1 d\sigma_2}{\sin^{p_1}\frac{\sigma_1-v_k}{2}\sin^{p_2}\frac{\sigma_2-w_l}{2}} \ge$$

$$\ge \sum_{i=0}^{n_1-1}{}' \sum_{j=0}^{m_1-1}{}'' \int\limits_{v_i}^{v_{i+1}}\int\limits_{w_j}^{w_{j+1}} \frac{\varphi^*(\sigma_1,\sigma_2)d\sigma_1 d\sigma_2}{\sin^{p_1}\frac{\sigma_1-v_k}{2}\sin^{p_2}\frac{\sigma_2-w_l}{2}} \ge$$

$$\ge \sum_{i=k+1}^{k+n_1/2-2}\ \sum_{j=l+1}^{l+m_1/2-2} \left|\frac{1}{\sin^{p_1}\frac{\pi(i-k)}{n_1}}\right|\left|\frac{1}{\sin^{p_2}\frac{\pi(j-l)}{m_1}}\right| \times$$

$$\times \int\limits_{v_i}^{v_{i+1}}\int\limits_{w_j}^{w_{j+1}} \varphi^*(\sigma_1,\sigma_2)d\sigma_1 d\sigma_2 +$$

$$+ \sum_{i=k+1}^{k+n_1/2-2}\ \sum_{j=l-1-m_1/2-2}^{l-1} \left|\frac{1}{\sin^{p_1}\frac{\pi(i-k)}{n_1}}\right|\left|\frac{1}{\sin^{p_2}\frac{\pi(j-l)}{m_1}}\right| \times$$

$$\times \int\limits_{v_i}^{v_{i+1}}\int\limits_{w_j}^{w_{j+1}} \varphi^*(\sigma_1,\sigma_2)d\sigma_1 d\sigma_2 +$$

$$+ \sum_{i=k-1-n_1/2-2}^{k-1}\ \sum_{j=l+1}^{l+m_1/2-2} \left|\frac{1}{\sin^{p_1}\frac{\pi(j-l)}{n_1}}\right|\left|\frac{1}{\sin^{p_2}\frac{\pi(j-l)}{m_1}}\right| \times$$

$$\times \int\limits_{v_i}^{v_{i+1}}\int\limits_{w_j}^{w_{j+1}} \varphi^*(\sigma_1,\sigma_2)d\sigma_1 d\sigma_2 +$$

$$+ \sum_{i=k-1-n_1/2-2}^{k-1}\ \sum_{j=l-1-m_1/2-2}^{l-1} \left|\frac{1}{\sin^{p_1}\frac{\pi(j-l)}{n_1}}\right|\left|\frac{1}{\sin^{p_2}\frac{\pi(j-l)}{m_1}}\right| \times$$

$$\times \int\limits_{v_i}^{v_{i+1}}\int\limits_{w_j}^{w_{j+1}} \varphi^*(\sigma_1,\sigma_2)d\sigma_1 d\sigma_2,$$

где $\sum'$ означает суммирование по $i \ne k-1, k$, $\sum''$ означает суммирование по $j \ne l-1, l$.

Усредняя предыдущее неравенство по $k(k = 0, 1, \ldots, n_1 - 1)$ и $l(l = = 0, 1, \ldots, m_1 - 1)$, имеем:

$$\sup_{\varphi\in\overline{W}^{r,r}(1)} \max_{0\le s_1,s_2\le 2\pi} \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(\sigma_1,\sigma_2)\frac{1}{\sin^{p_1}\frac{\sigma_1-s_1}{2}}\frac{1}{\sin^{p_2}\frac{\sigma_2-s_2}{2}}d\sigma_1 d\sigma_2 \ge$$

$$\ge \frac{1}{n_1m_1}\sum_{k=0}^{n_1-1}\sum_{l=0}^{m_1-1}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi^*_{kl}(\sigma_1,\sigma_2)\frac{1}{\sin^{p_1}\frac{\sigma_1-v_k}{2}}\frac{1}{\sin^{p_2}\frac{\sigma_2-w_l}{2}}d\sigma_1 d\sigma_2 \ge$$

$$\ge \frac{1}{n_1m_1}\sum_{k=0}^{n_1-1}\sum_{l=0}^{m_1-1}\left[\sum_{i=1}^{n_1/2-2}\sum_{j=1}^{m_1/2-2}\int_{v_{k+i}}^{v_{k+i+1}}\int_{w_{l+j}}^{w_{l+j+1}}\varphi^*(\sigma_1,\sigma_2)\left|\frac{1}{\sin^{p_1}\frac{\sigma_1-v_k}{2}}\right|\times\right.$$

$$\times\left|\frac{1}{\sin^{p_2}\frac{\sigma_2-w_l}{2}}\right|d\sigma_1 d\sigma_2+$$

$$+\sum_{i=1}^{n_1/2-2}\sum_{j=1}^{m_1/2-2}\int_{v_{k+1}}^{v_{k+i+1}}\int_{w_{l-j-1}}^{w_{l-j}}\varphi^*(\sigma_1,\sigma_2)\left|\frac{1}{\sin^{p_1}\frac{\sigma_1-v_k}{2}}\right|\left|\frac{1}{\sin^{p_2}\frac{\sigma_2-w_l}{2}}\right|d\sigma_1 d\sigma_2+$$

$$+\sum_{i=1}^{n_1/2-2}\sum_{j=1}^{m_1/2-2}\int_{v_{k-j-1}}^{v_{k-j}}\int_{w_{l+j}}^{w_{l+j+1}}\varphi^*(\sigma_1,\sigma_2)\left|\frac{1}{\sin^{p_1}\frac{\sigma_1-v_k}{2}}\right|\left|\frac{1}{\sin^{p_2}\frac{\sigma_2-w_l}{2}}\right|d\sigma_1 d\sigma_2+$$

$$\left.+\sum_{i=1}^{n_1/2-2}\sum_{j=1}^{m_1/2-2}\int_{v_{k-i-1}}^{v_{k-i}}\int_{w_{l-j-1}}^{w_{l-j}}\varphi^*(\sigma_1,\sigma_2)\left|\frac{1}{\sin^{p_1}\frac{\sigma_1-v_k}{2}}\right|\left|\frac{1}{\sin^{p_2}\frac{\sigma_2-w_l}{2}}\right|d\sigma_1 d\sigma_2\right] \ge$$

$$\ge \frac{1}{n_1m_1}\sum_{k=0}^{n_1-1}\sum_{l=0}^{m_1-1}\left[\sum_{i=1}^{n_1/2-2}\sum_{j=1}^{m_1/2-2}\left(\frac{n_1}{i+1}\right)^{p_1}\left(\frac{m_1}{j+1}\right)^{p_2}\times\right.$$

$$\times\int_{v_{k+i}}^{v_{k+i+1}}\int_{w_{l+j}}^{w_{l+j+1}}\varphi^*(\sigma_1,\sigma_2)d\sigma_1 d\sigma_2+$$

$$+\sum_{i=1}^{n_1/2-2}\sum_{j=1}^{m_1/2-2}\left(\frac{n_1}{i+1}\right)^{p_1}\left(\frac{m_1}{j+1}\right)^{p_2}\int_{v_{k+1}}^{v_{k+i+1}}\int_{w_{l-j-1}}^{w_{l-j}}\varphi^*(\sigma_1,\sigma_2)d\sigma_1 d\sigma_2+$$

$$+\sum_{i=1}^{n_1/2-2}\sum_{j=1}^{m_1/2-2}\left(\frac{n_1}{i+1}\right)^{p_1}\left(\frac{m_1}{j+1}\right)^{p_2}\int_{v_{k-i-1}}^{v_{k-i}}\int_{w_{l+j}}^{w_{l+j+1}}\varphi^*(\sigma_1,\sigma_2)d\sigma_1 d\sigma_2+$$

$$\left.+\sum_{i=1}^{n_1/2-2}\sum_{j=1}^{m_1/2-2}\left(\frac{n_1}{i+1}\right)^{p_1}\left(\frac{m_1}{j+1}\right)^{p_2}\int_{v_{k-i-1}}^{v_{k-i}}\int_{w_{l-j-1}}^{w_{l-j}}\varphi^*(\sigma_1,\sigma_2)d\sigma_1 d\sigma_2\right] =$$

$$= 4n_1^{p_1-1}m_1^{p_2-1}\sum_{i=1}^{n_1/2-2}\sum_{j=1}^{m_1/2-2}\left(\frac{n_1}{i+1}\right)^{p_1}\left(\frac{m_1}{j+1}\right)^{p_2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi^*(\sigma_1,\sigma_2)d\sigma_1 d\sigma_2 \ge$$

$$\geq An_1^{p_1-1}m_1^{p_2-1}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\varphi^*(\sigma_1,\sigma_2)d\sigma_1 d\sigma_2 \geq$$

$$\geq An^{p_1-1}m^{p_2-1}\left(\frac{2K_{r_1}\pi}{n^{r_1}}+\frac{2K_{r_2}\pi}{m^{r_2}}+\frac{4K_{r_1}K_{r_2}\pi^2}{n^{r_1}m^{r_2}}\right)=$$

$$=An^{p_1-1}m^{p_2-1}\left(\frac{1}{n^{r_1}}+\frac{1}{m^{r_2}}+\frac{1}{n^{r_1}m^{r_2}}\right).$$

Получена оценка снизу, когда p_1 и p_2 не обязательно четные числа.

Замечание. Описанный выше способ получения оценок снизу применим в случае, когда p_1 и p_2— четные числа.

Приступим к оценке погрешности кубатурной формулы (1.3). Напомним, что используемый в кубатурной формуле (1.3) интерполяционный сплайн $s_{nm}(\varphi(s_1,s_2))$ строится по равномерному разбиению $v_k=2k\pi/n$, $k=0,1,\ldots,n$, $w_k=2k\pi/m$, $k=0,1,\ldots,m$.

Введем обозначение $\Delta_{kl}=[v_k,v_{k+1};w_l,w_{l+1}]$, $k=0,1,\ldots,n-1$, $l=$ $=0,1,\ldots,m-1$.

Тогда

$$|R_N(\varphi)|\leq\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l=0}^{m-1}\left|\int\limits_{\Delta_{kl}}\int\frac{\Psi(\sigma_1,\sigma_2)d\sigma_1\sigma_2}{\sin^{p_1}\frac{\sigma_1-s_1}{2}\sin^{p_2}\frac{\sigma_2-s_2}{2}}\right|,$$

где $\Psi(\sigma_1,\sigma_2)=\varphi(\sigma_1,\sigma_2)-s_{nm}(\varphi(\sigma_1,\sigma_2))$.

Пусть $(s_1,s_2)\in\Delta_{ij}$. Очевидно,

$$|R_N(\varphi)|\leq\left|\int\limits_{\Delta_{kl}^*}\int\frac{\Psi(\sigma_1,\sigma_2)d\sigma_1\sigma_2}{\sin^{p_1}\frac{\sigma_1-s_1}{2}\sin^{p_2}\frac{\sigma_2-s_2}{2}}\right|+$$

$$+\left(\sum_{k=0}^{i-2}\sum_{l=0}^{j-2}+\sum_{k=i+2}^{n-1}\sum_{l=0}^{j-2}+\sum_{k=0}^{i-2}\sum_{l=j+2}^{m-1}+\sum_{k=j+2}^{n-1}\sum_{l=j+2}^{m-1}\right)\times$$

$$\times\left|\int\limits_{\Delta_{kl}}\int\frac{\Psi(\sigma_1,\sigma_2)d\sigma_1 d\sigma_2}{\sin^{p_1}\frac{\sigma_1-s_1}{2}\sin^{p_2}\frac{\sigma_2-s_2}{2}}\right|+\left(\sum_{k=0}^{i-2}\sum_{l=j-2}^{j+1}+\sum_{k=i+2}^{n-1}\sum_{l=j-2}^{j+1}+\right.$$

$$\left.+\sum_{k=i-1}^{i+1}\sum_{l=0}^{j-2}+\sum_{k=i-1}^{i+1}\sum_{l=j+2}^{m-1}\right)\left|\int\limits_{\Delta_{kl}}\int\frac{\Psi(\sigma_1,\sigma_2)d\sigma_1\sigma_2}{\sin^{p_1}\frac{\sigma_1-s_1}{2}\sin^{p_2}\frac{\sigma_2-s_2}{2}}\right|=r_1+r_2+r_3.$$

Здесь $\Delta_{i,j}^*=\Delta_{i-1,j-1}\cup\Delta_{i-1,j}\cup\Delta_{i-1,j+1}\cup\cdots\cup\Delta_{i+1,j+1}$.

Оценим каждую группу слагаемых в отдельности.

Воспользовавшись определением гиперсингулярных интегралов, имеем

$$r_1 \leq A n^{p_1-1} m^{p_2-1} \left(\frac{1}{n^{r_1}} + \frac{1}{m^{r_2}} \right).$$

Очевидно,

$$r_2 \leq 4 \sum_{k=0}^{i-2} \sum_{l=0}^{j-2} \left| \int\int_{\Delta_{kl}} \frac{\Psi(\sigma_1,\sigma_2) d\sigma_1 d\sigma_2}{\sin^{p_1} \frac{\sigma_1 - s_1}{2} \sin^{p_2} \frac{\sigma_2 - s_2}{2}} \right| \leq$$

$$\leq \frac{4 n^{p_1} m^{p_2}}{\pi^{p_1+p_2}} \sum_{k=0}^{i-2} \sum_{l=0}^{j-2} \frac{1}{(i-k)^{p_1} (j-l)^{p_2}} \int\int_{\Delta_{kl}} |\Psi(\tau_1,\tau_2)| \, d\tau_1 d\tau_2 \leq$$

$$\leq A n^{p_1-1} m^{p_2-1} \left(\frac{1}{n^{r_1}} + \frac{1}{m^{r_2}} \right);$$

$$r_3 \leq 4 \sum_{k=0}^{i-2} \sum_{l=j-2}^{j+1} \left| \int\int_{\Delta_{kl}} \frac{\Psi(\sigma_1,\sigma_2) d\sigma_1 d\sigma_2}{\sin^{p_1} \frac{\sigma_1 - s_1}{2} \sin^{p_2} \frac{\sigma_2 - s_2}{2}} \right| \leq$$

$$\leq 4 \sum_{k=0}^{i-2} \sum_{l=j-2}^{j+1} \left| \int\int_{\Delta_{kl}} \left(\Psi(\sigma_1,\sigma_2) - \Psi(\sigma_1,s_2) - \Psi_2'(\sigma_1,s_2) \frac{\sigma_2 - s_2}{1!} - \cdots \right.\right.$$

$$\left.\left. - \Psi_2^{(p_2)}(\sigma_1,s_2) \frac{(\sigma_2 - s_2)^{p_2}}{p_2!} \right) \frac{d\sigma_1}{\sin^{p_1} \frac{\sigma_1 - s_1}{2}} \frac{d\sigma_2}{\sin^{p_2} \frac{\sigma_2 - s_2}{2}} \right| +$$

$$+ 4 \sum_{k=0}^{i-2} \sum_{l=j-2}^{j+1} \left| \int\int_{\Delta_{kl}} \left(\Psi(\sigma_1,s_2) + \Psi_2'(\sigma_1,s_2) \frac{\sigma_2 - s_2}{1!} + \cdots + \right.\right.$$

$$\left. + \Psi_2^{(p_2)}(\sigma_1,s_2) \frac{(\sigma_2 - s_2)^{p_2}}{p_2!} \right) \times$$

$$\times \frac{d\sigma_1 d\sigma_2}{\sin^{p_1} \frac{\sigma_1 - s_1}{2} \sin^{p_2} \frac{\sigma_2 - s_2}{2}} \leq A n^{p_1-1} m^{p_2-1} \left(\frac{1}{n^{r_1}} + \frac{1}{m^{r_2}} \right),$$

где $\Psi_2^{(k)}$ означает частную производную k-го порядка по второй переменной.

Из полученных оценок следует, что $|R_N(\varphi)| \leq A n^{p_1-1} m^{p_2-1} \left(\frac{1}{n^{r_1}} + \frac{1}{m^{r_2}} \right)$ и, следовательно, $R_N[\Psi] \leq A n^{p_1-1} m^{p_2-1} \left(\frac{1}{n^{r_1}} + \frac{1}{m^{r_2}} \right)$. Из сопоставления этой оценки и оценки $\zeta_N[\Psi]$ следует справедливость теоремы.

Применение кубатурной формулы (1.3) на практике достаточно обременительно. Приведем кубатурную формулу, которая не является оптимальной, но достаточно легко реализуется. Построение этой кубатурной формулы изложим на примере интеграла

$$J\varphi = \int\limits_{\gamma_1}\int\limits_{\gamma_2} \frac{\varphi(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2}{(\tau_1-t_1)^p(\tau_2-t_2)^p},$$

где γ_i- единичная окружность с центром в начале координат в плоскости комплексной переменной z_i, $i=1,2$.

Обозначим через v_k^j узлы, расположенные на окружности γ_j, $j=1,2$, и определяемые формулой $v_k^j = e^{is_k}$, $s_k = 2k\pi/(2n+1)$, $k=0,1,\dots,2n$, $j=1,2$.

Через $L_{nn}(\varphi;\tau_1,\tau_2)$ обозначим полином, интерполирующий функцию $\varphi(\tau_1,\tau_2)$ по узлам $\{v_k^1, v_l^2\}$, $k,l=0,1,\dots,2n$.

Интеграл $J\varphi$ будем вычислять по кубатурной формуле

$$J\varphi = \int\limits_{\gamma_1}\int\limits_{\gamma_2} \frac{L_{nn}(\varphi;\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2}{(\tau_1-t_1)^p(\tau_2-t_2)^p} + R_N(\varphi). \tag{1.4}$$

Можно показать, что на классе функций $C_2^r(1)$, $r \geq 2p$, эта кубатурная формула имеет погрешность

$$R_{nn}[C_2^r(1)] \leq B\frac{\ln^2 N}{n^{r-2p+2}}.$$

Аналогичная оценка справедлива и на классе функций $W^{r,r}(1)$.

При построении кубатурной формулы (1.4) можно непосредственно вычислить гиперсингулярный интеграл от полинома $L_{nn}(\varphi;\tau_1,\tau_2)$. Можно также воспользоваться формулой

$$\int\limits_{\gamma_1}\int\limits_{\gamma_2} \frac{\varphi(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2}{(\tau_1-t_1)^p(\tau_2-t_2)^p} =$$

$$= \frac{1}{(p!)^2}\int\limits_{\gamma_1}\int\limits_{\gamma_2} \frac{\partial^{2p-2}\varphi(\tau_1,\tau_2)}{\partial\tau_1^{p-1}\partial\tau_2^{p-1}}\frac{d\tau_1 d\tau_2}{(\tau_1-t_1)(\tau_2-t_2)},$$

учитывая, что полисингулярные интегралы от полиномов $t^k\tau^l, k,l=-n$, $-n+1,\cdots,-1,\, 0,1,\cdots,n$ являются табличными.

2. Кубатурные формулы для вычисления интеграла Адамара в плоскости двух комплексных переменных

Рассмотрим интеграл Адамара

$$A\varphi = \int\limits_{L_1}\int\limits_{L_2} \frac{\varphi(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1\,d\tau_2}{(\tau_1-t_1)^{p_1}(\tau_2-t_2)^{p_2}}, \tag{2.1}$$

где L_1 и L_2 – замкнутые гладкие Ляпуновские контуры в комплексных плоскостях. Функция $\varphi(\tau_1,\tau_2)$ определена на контуре $L = L_1 \times L_2$ и имеет производные до r_1-го порядка по переменной τ_1 и r_2-го порядка по переменной τ_2, причем $\max|\varphi^{(r_1)}_{\tau_1}(\tau_1,\tau_2)| \le 1$; $\max|\varphi^{(r_2)}_{\tau_2}(\tau_1,\tau_2)| \le$ ≤ 1; $\max|\varphi^{(r_1,r_2)}_{\tau_1\tau_2}(\tau_1,\tau_2)| \le 1$, т. е. $\varphi(\tau_1,\tau_2) \in \overline{W}^{r_1 r_2}(1)$.

Для вычисления интегралов вида (2.1) будем использовать кубатурные формулы

$$A\varphi = \sum_{k=0}^{N_1}\sum_{k=0}^{N_2} p_{kl}(t_1,t_2)\varphi(v_k,w_l) + R_{N_1N_2}(t_1,t_2,p_{kl}(t_1,t_2),\varphi). \tag{2.2}$$

Для получения оценки снизу погрешности кубатурных формул вычисления интегралов вида (2.1) заметим, что их частным случаем являются интегралы по единичным окружностям γ_1 и γ_2, расположенным в плоскостях комплексных переменных z_1 и z_2. Точно так же, как в случае одномерных гиперсингулярных интегралов по единичной окружности, можно показать, что интеграл (2.1) сводится к интегралу

$$A\varphi = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{\Psi(\sigma_1,\sigma_2)d\sigma_1 d\sigma_2}{\sin^{p_1}\frac{\sigma_1-s_1}{2}\sin^{p_1}\frac{\sigma_2-s_2}{2}}, \tag{2.3}$$

а кубатурная формула (2.2) сводится к кубатурной формуле

$$A\varphi = \sum_{k=0}^{N_1}\sum_{k=0}^{N_2} p^*_{kl}(s_1,s_2)\varphi(v^*_k,w^*_l) + R_{N_1N_2}(s_1,s_2,p^*_{kl}(s_1,s_2),\varphi). \tag{2.4}$$

В предыдущем разделе получена оценка

$$\zeta_N[\overline{W}^{r_1,r_2}(1)] \ge AN_1^{p_1-1}N_2^{p_2-1}\left(\frac{1}{N_1^{r_1}} + \frac{1}{N_2^{r_2}} + \frac{1}{N_1^{r_1}N_2^{r_2}}\right),$$

которая будет справедлива и в случае вычисления интегралов вида (2.1) по кубатурным формулам вида (2.2).

Предположим, что функция $\varphi(\tau_1, \tau_2)$ задана с погрешностью, т. е. вместо $\varphi(\tau_1, \tau_2)$ задана $\tilde{\varphi}(\tau_1, \tau_2)$, такая, что $\max|\varphi(\tau_1, \tau_2) - \tilde{\varphi}(\tau_1, \tau_2)| \leq \varepsilon$. Проведем разбиение контура L_1 на N_1 равных частей точками t_{k_1} и контура L_2 на N_2 равных частей точками t_{k_2} и построим следующую кубатурную формулу:

$$A\varphi = \frac{1}{4}\sum_{k_1=0}^{N_1-1}\sum_{k_2=0}^{N_2-1}\int\limits_{t_{k_1}}^{t_{k_1+1}}\int\limits_{t_{k_2}}^{t_{k_2+1}}\left[\frac{\tilde{\varphi}(t'_{k_1}, t'_{k_2})}{[\tau_1 - (t_1 + \bar{n}_1 h_1)]^{p_1}[\tau_2 - (t_2 + \bar{n}_2 h_2)]^{p_2}} + \right.$$

$$+\frac{\tilde{\varphi}(t'_{k_1}, t'_{k_2})}{[\tau_1 - (t_1 + \bar{n}_1 h_1)]^{p_1}[\tau_2 - (t_2 - \bar{n}_2 h_2)]^{p_2}} +$$

$$+\frac{\tilde{\varphi}(t'_{k_1}, t'_{k_2})}{[\tau_1 - (t_1 - \bar{n}_1 h_1)]^{p_1}[\tau_2 - (t_2 + \bar{n}_2 h_2)]^{p_2}} +$$

$$\left. +\frac{\tilde{\varphi}(t'_{k_1}, t'_{k_2})}{[\tau_1 - (t_1 - \bar{n}_1 h_1)]^{p_1}[\tau_2 - (t_2 - \bar{n}_2 h_2)]^{p_2}}\right] d\tau_1\, d\tau_2 + R_{N_1 N_2}(\varphi), \qquad (2.5)$$

где t'_{k_1} – точка контура L_1, равноотстоящая от t_{k_1} и t_{k_1+1};, t'_{k_2} – точка контура L_2, равноотстоящая от t_{k_2} и t_{k_2+1}; $h_1 = N_1^{-1/p_1}$, $h_2 = N_2^{-1/p_2}$; $\bar{n}_i$ – единичная нормаль в направлении вогнутости контура L_i в точке t'_{k_i}; точка $t'_{k_1} - \bar{n}_1 h_1$ находится внутри контура L_1, но не на контуре L_1; точка $t'_{k_2} - \bar{n}_2 h_2$ находится внутри контура L_2, но не на контуре L_2.

Замечание. Описанное выше построение всегда осуществимо при достаточно больших N_1 и N_2.

Теоретическая оценка погрешности кубатурной формулы (2.5) при $p_1 + p_2 > 2$ связана с громоздкими вычислениями, и полученные оценки труднообозримы. Для простоты ниже ограничимся случаем $p_1 = p_2 = 2$.

Теорема 2.1 [24]. Пусть функция $\varphi(\tau_1, \tau_2) \in \overline{W}^{r_1 r_2}(1)$ задана на замкнутых гладких контурах L_1 и L_2 значениями $\tilde{\varphi}(t_{k_1}, t_{k_2})$, причем $|\varphi(\tau_1, \tau_2 - \tilde{\varphi}(\tau_1, \tau_2)| \leq \varepsilon$. Погрешность кубатурной формулы (2.5) для вычисления интеграла Адамара (2.1) при $h_1 = N_1^{-1/2}$, $h_2 = N_2^{-1/2}$ оценивается неравенством $|R_{N_1,N_2}(\varphi)| \leq A(h_1 h_2 |\ln h_1||\ln h_2| + \varepsilon/h_1 h_2)$.

Доказательство. Используя формулы Сохоцкого для двумерного интеграла типа Коши, приведенные Ф. Д. Гаховым [39], докажем справедливость формулы

$$\int\limits_{L_1}\int\limits_{L_2}\frac{\varphi(\tau_1, \tau_2)\, d\tau_1\, d\tau_2}{(\tau_1 - t_1)^{p_1}(\tau_2 - t_2)^{p_2}} = \int\limits_{L}\frac{\varphi(\tau_1, \tau_2)\, d\tau_1\, d\tau_2}{(\tau_1 - t_1)^{p_1}(\tau_2 - t_2)^{p_2}} =$$

$$= \Phi^{++}(t_1,t_2) + \Phi^{+-}(t_1,t_2) + \Phi^{-+}(t_1,t_2) + \Phi^{--}(t_1,t_2), \qquad (2.6)$$

где

$$\Phi^{++}(t_1,t_2) = \lim_{\eta_1\to 0,\eta_2\to 0} \int\limits_L \frac{\varphi(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1\,d\tau_2}{[\tau_1-(t_1-\bar n_1\eta_1)]^{p_1}[\tau_2-(t_2-\bar n_2\eta_2)]^{p_2}},$$

$$\Phi^{+-}(t_1,t_2) = \lim_{\eta_1\to 0,\eta_2\to 0} \int\limits_L \frac{\varphi(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1\,d\tau_2}{[\tau_1-(t_1-\bar n_1\eta_1)]^{p_1}[\tau_2-(t_2+\bar n_2\eta_2)]^{p_2}},$$

$$\Phi^{-+}(t_1,t_2) = \lim_{\eta_1\to 0,\eta_2\to 0} \int\limits_L \frac{\varphi(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1\,d\tau_2}{[\tau_1-(t_1+\bar n_1\eta_1)]^{p_1}[\tau_2-(t_2-\bar n_2\eta_2)]^{p_2}},$$

$$\Phi^{--}(t_1,t_2) = \lim_{\eta_1\to 0,\eta_2\to 0} \int\limits_L \frac{\varphi(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1\,d\tau_2}{[\tau_1-(t_1+\bar n_1\eta_1)]^{p_1}[\tau_2-(t_2+\bar n_2\eta_2)]^{p_2}},$$

$L = L_1 \times L_2$.

По определению интеграла Адамара

$$\int\limits_L \frac{\varphi(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1\,d\tau_2}{(\tau_1-t_1)^{p_1}(\tau_2-t_2)^{p_2}} = \frac{1}{(p_1-1)!(p_2-1)!}\int\limits_L \frac{D^{(p_1-1,p_2-1)}\varphi(\tau_1,\tau_2)}{(\tau_1-t_1)(\tau_2-t_2)}\,d\tau_1\,d\tau_2,$$

где $D^{(p_1,p_2)}\varphi = D^{(p_1)}D^{(p_2)}\varphi$, $D^{(p_i)}\varphi = \partial^{p_i}\varphi/\partial x_i^{p_i}$, $i=1,2$.

Поэтому

$$\int\limits_L \frac{\varphi(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1\,d\tau_2}{(\tau_1-t_1)^{p_1}(\tau_2-t_2)^{p_2}} =$$

$$= \lim_{\eta_1\to 0,\eta_2\to 0} \frac{1}{(p_1-1)!(p_2-1)!}\left[\int\limits_L \frac{D^{(p_1-1,p_2-1)}\varphi(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1\,d\tau_2}{[\tau_1-(t_1-\bar n_1\eta_1)][\tau_2-(t_2-\bar n_2\eta_2)]}+\right.$$
$$+\int\limits_L \frac{D^{(p_1-1,p_2-1)}\varphi(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1\,d\tau_2}{[\tau_1-(t_1+\bar n_1\eta_1)][\tau_2-(t_2-\bar n_2\eta_2)]}+$$
$$+\int\limits_L \frac{D^{(p_1-1,p_2-1)}\varphi(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1\,d\tau_2}{[\tau_1-(t_1-\bar n_1\eta_1)][\tau_2-(t_2+\bar n_2\eta_2)]}+$$
$$\left.+\int\limits_L \frac{D^{(p_1-1,p_2-1)}\varphi(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1\,d\tau_2}{[\tau_1-(t_1+\bar n_1\eta_1)][\tau_2-(t_2+\bar n_2\eta_2)]}\right]. \qquad (2.7)$$

По формуле Коши

$$\int\limits_{L_1}\int\limits_{L_2} \frac{\varphi(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1\,d\tau_2}{[\tau_1-(t_1-\bar n_1 h_1)]^{p_1}[\tau_2-(t_2-\bar n_2 h_2)]^{p_2}} =$$

$$=\frac{1}{(p_1-1)!(p_2-1)!}\int\limits_{L_1}\int\limits_{L_2}\frac{D^{(p_1-1,p_2-1)}\varphi(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1\,d\tau_2}{[\tau_1-(t_1-\bar{n}_1h_1)][\tau_2-(t_2-\bar{n}_2h_2)]};$$

$$\int\limits_{L_1}\int\limits_{L_2}\frac{\varphi(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1\,d\tau_2}{[\tau_1-(t_1+\bar{n}_1h_1)]^{p_1}[\tau_2-(t_2-\bar{n}_2h_2)]^{p_2}}=$$

$$=\frac{1}{(p_1-1)!(p_2-1)!}\int\limits_{L_1}\int\limits_{L_2}\frac{D^{(p_1-1,p_2-1)}\varphi(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1\,d\tau_2}{[\tau_1-(t_1+\bar{n}_1h_1)][\tau_2-(t_2-\bar{n}_2h_2)]};\tag{2.8}$$

$$\int\limits_{L_1}\int\limits_{L_2}\frac{\varphi(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1\,d\tau_2}{[\tau_1-(t_1-\bar{n}_1h_1)]^{p_1}[\tau_2-(t_2+\bar{n}_2h_2)]^{p_2}}=$$

$$=\frac{1}{(p_1-1)!(p_2-1)!}\int\limits_{L_1}\int\limits_{L_2}\frac{D^{(p_1-1,p_2-1)}\varphi(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1\,d\tau_2}{[\tau_1-(t_1-\bar{n}_1h_1)][\tau_2-(t_2+\bar{n}_2h_2)]};$$

$$\int\limits_{L_1}\int\limits_{L_2}\frac{\varphi(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1\,d\tau_2}{[\tau_1-(t_1+\bar{n}_1h_1)]^{p_1}[\tau_2-(t_2+\bar{n}_2h_2)]^{p_2}}=$$

$$=\frac{1}{(p_1-1)!(p_2-1)!}\int\limits_{L_1}\int\limits_{L_2}\frac{D^{(p_1-1,p_2-1)}\varphi(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1\,d\tau_2}{[\tau_1-(t_1+\bar{n}_1h_1)][\tau_2-(t_2+\bar{n}_2h_2)]}.$$

Из формул (2.7) и (2.8) следует формула (2.5).

Рассмотрим отдельно интеграл

$$\int\limits_{L_1}\int\limits_{L_2}\frac{D^{(p_1-1,p_2-1)}\varphi(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1\,d\tau_2}{[\tau_1-(t_1-\bar{n}_1h_1)][\tau_2-(t_2-\bar{n}_2h_2)]}=$$

$$=\int\limits_{L_1}\int\limits_{L_2}\frac{D(t_1,t_2,\tau_1,\tau_2)}{[\tau_1-(t_1-\bar{n}_1h_1)][\tau_2-(t_2-\bar{n}_2h_2)]}d\tau_1\,d\tau_2+$$

$$+\int\limits_{L_1}\int\limits_{L_2}\frac{D^{(p_1-1,p_2-1)}\varphi(t_1,\tau_2)-D^{(p_1-1,p_2-1)}\varphi(t_1,t_2)}{[\tau_1-(t_1-\bar{n}_1h_1)][\tau_2-(t_2-\bar{n}_2h_2)]}\,d\tau_1\,d\tau_2+$$

$$+\int\limits_{L_1}\int\limits_{L_2}\frac{D^{(p_1-1,p_2-1)}\varphi(\tau_1,t_2)-D^{(p_1-1,p_2-1)}\varphi(t_1,t_2)}{[\tau_1-(t_1-\bar{n}_1h_1)][\tau_2-(t_2-\bar{n}_2h_2)]}\,d\tau_1\,d\tau_2+$$

$$+\int\limits_{L_1}\int\limits_{L_2}\frac{D^{(p_1-1,p_2-1)}\varphi(t_1,t_2)\,d\tau_1\,d\tau_2}{[\tau_1-(t_1-\bar{n}_1h_1)][\tau_2-(t_2-\bar{n}_2h_2)]}=I_1+I_2+I_3+I_4.$$

где $D(t_1,t_2,\tau_1,\tau_2)=\Psi(\tau_1,\tau_2)-\Psi(t_1,\tau_2)-\Psi(\tau_1,t_2)+\Psi(t_1,t_2)$,
$\Psi(\tau_1,\tau_2)=D^{p_1-1,p_2-1}\varphi(\tau_1,\tau_2)$.

Второй, третий и четвертый интегралы справа вычислим по формуле Коши

$$I_2 = \int\limits_{L_1}\int\limits_{L_2} \frac{\Psi(t_1,\tau_2)-\Psi(t_1,t_2)}{[\tau_1-(t_1-\bar{n}_1h_1)][\tau_2-(t_2-\bar{n}_2h_2)]}\,d\tau_1\,d\tau_2 =$$

$$= \int\limits_{L_2} \frac{\Psi(t_1,\tau_2)-\Psi(t_1,t_2)}{[\tau_2-(t_2-\bar{n}_2h_2)]}\,d\tau_2\times$$

$$\times\begin{cases} 2\pi i, \ \text{ если } \ t_1-\bar{n}_1h_1 \ \text{ лежит внутри контура } \ L_1; \\ 0- \ \text{ в остальных случаях.} \end{cases}$$

Аналогично вычисляется интеграл I_3 :

$$I_3 = \int\limits_{L_1} \frac{\Psi(\tau_1,t_2)-\Psi(t_1,t_2)}{[\tau_1-(t_1-\bar{n}_1h_1)]}\,d\tau_2\times$$

$$\times\begin{cases} 2\pi i, \ \text{если} \quad t_2-\bar{n}_2h_2 \quad \text{лежит внутри контура } \ L_1; \\ 0- \ \text{ в остальных случаях.} \end{cases}$$

Интеграл

$$I_4 = \Psi(t_1,t_2)\int\limits_{L_1} \frac{d\tau_1}{[\tau_1-(t_1-\bar{n}_1h_1)]}\int\limits_{L_2} \frac{d\tau_2}{[\tau_2-(t_2-\bar{n}_2h_2)]} =$$

$$= \Psi(t_1,t_2)\begin{cases} -4\pi^2, \ \text{если} \qquad\qquad (t_1-\bar{n}_1h_1)\in G_1 \ \text{ и } \ (t_2-\bar{n}_2h_2)\in G_2; \\ 0- \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Здесь $G_i, i=1,2-$ открытые области, ограниченные контурами L_i.

Таким образом, все интегралы, за исключением I_1, сводятся к одномерным интегралам.

Оценим погрешность кубатурной формулы (2.4).

Очевидно,

$$|R_{N_1N_2}(\varphi)| = \Bigg|\int\limits_{L_1}\int\limits_{L_2} \frac{\varphi(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1\,d\tau_2}{(\tau_1-t_1)^{p_1}(\tau_2-t_2)^{p_2}} -$$

$$-\frac{1}{4}\sum_{k_1=0}^{N_1-1}\sum_{k_2=0}^{N_2-1}\tilde{\varphi}(t'_{k_1},t'_{k_2})\int\limits_{t_{k_1}}^{t_{k_1+1}}\int\limits_{t_{k_2}}^{t_{k_2+1}}\Big[\frac{1}{[\tau_1-(t_1-\bar{n}_1h_1)]^{p_1}[\tau_2-(t_2-\bar{n}_2h_2)]^{p_2}}+$$

$$+\frac{1}{[\tau_1-(t_1+\bar{n}_1h_1)]^{p_1}[\tau_2-(t_2-\bar{n}_2h_2)]^{p_2}}+$$

$$
+\frac{1}{[\tau_1-(t_1-\bar n_1 h_1)]^{p_1}[\tau_2-(t_2+\bar n_2 h_2)]^{p_2}}+
$$

$$
+\frac{1}{[\tau_1-(t_1+\bar n_1 h_1)]^{p_1}[\tau_2-(t_2+\bar n_2 h_2)]^{p_2}}\Big]\,d\tau_1\,d\tau_2\Big|\leq
$$

$$
\leq\Big|\lim_{\eta_1\to0,\eta_2\to0}\frac{1}{(p_1-1)!(p_2-1)!}\Big\{\Big[\int\limits_{L_1}\int\limits_{L_2}\frac{D^{(p_1-1,p_2-1)}\varphi(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1\,d\tau_2}{[\tau_1-(t_1-\bar n_1\eta_1)][\tau_2-(t_2-\bar n_2\eta_2)]}+
$$

$$
+\int\limits_{L_1}\int\limits_{L_2}\frac{D^{(p_1-1,p_2-1)}\varphi(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1\,d\tau_2}{[\tau_1-(t_1+\bar n_1\eta_1)][\tau_2-(t_2-\bar n_2\eta_2)]}+
$$

$$
+\int\limits_{L_1}\int\limits_{L_2}\frac{D^{(p_1-1,p_2-1)}\varphi(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1\,d\tau_2}{[\tau_1-(t_1-\bar n_1\eta_1)][\tau_2-(t_2+\bar n_2\eta_2)]}+
$$

$$
+\int\limits_{L_1}\int\limits_{L_2}\frac{D^{(p_1-1,p_2-1)}\varphi(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1\,d\tau_2}{[\tau_1-(t_1+\bar n_1\eta_1)][\tau_2-(t_2+\bar n_2\eta_2)]}\Big]-
$$

$$
-\Big[\int\limits_{L_1}\int\limits_{L_2}\frac{D^{(p_1-1,p_2-1)}\varphi(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1\,d\tau_2}{[\tau_1-(t_1-\bar n_1 h_1)][\tau_2-(t_2-\bar n_2 h_2)]}+
$$

$$
+\int\limits_{L_1}\int\limits_{L_2}\frac{D^{(p_1-1,p_2-1)}\varphi(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1\,d\tau_2}{[\tau_1-(t_1+\bar n_1 h_1)][\tau_2-(t_2-\bar n_2 h_2)]}+
$$

$$
+\int\limits_{L_1}\int\limits_{L_2}\frac{D^{(p_1-1,p_2-1)}\varphi(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1\,d\tau_2}{[\tau_1-(t_1-\bar n_1 h_1)][\tau_2-(t_2+\bar n_2 h_2)]}+
$$

$$
+\int\limits_{L_1}\int\limits_{L_2}\frac{D^{(p_1-1,p_2-1)}\varphi(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1\,d\tau_2}{[\tau_1-(t_1+\bar n_1 h_1)][\tau_2-(t_2+\bar n_2 h_2)]}\Big]\Big\}+
$$

$$
+\frac{1}{4}\Big|\int\limits_{L_1}\int\limits_{L_2}\frac{\varphi(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1\,d\tau_2}{[\tau_1-(t_1-\bar n_1 h_1)]^{p_1}[\tau_2-(t_2-\bar n_2 h_2)]^{p_2}}-
$$

$$
-\sum_{k_1=0}^{N_1-1}\sum_{k_2=0}^{N_2-1}\varphi(t_{k_1}{}',t_{k_2}{}')\int\limits_{t_{k_1}}^{t_{k_1+1}}\int\limits_{t_{k_2}}^{t_{k_2+1}}\frac{d\tau_1\,d\tau_2}{[\tau_1-(t_1-\bar n_1 h_1)]^{p_1}[\tau_2-(t_2-\bar n_2 h_2)]^{p_2}}\Big|+
$$

$$
+\frac{1}{4}\Big|\int\limits_{L_1}\int\limits_{L_2}\frac{\varphi(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1\,d\tau_2}{[\tau_1-(t_1-\bar n_1 h_1)]^{p_1}[\tau_2-(t_2+\bar n_2 h_2)]^{p_2}}-
$$

$$
-\sum_{k_1=0}^{N_1-1}\sum_{k_2=0}^{N_2-1}\varphi(t'_{k_1},t'_{k_2})\int\limits_{t_{k_1}}^{t_{k_1+1}}\int\limits_{t_{k_2}}^{t_{k_2+1}}\frac{d\tau_1\,d\tau_2}{[\tau_1-(t_1-\bar n_1 h_1)]^{p_1}[\tau_2-(t_2+\bar n_2 h_2)]^{p_2}}|+
$$

$$+\frac{1}{4}\Big|\int\limits_{L_1}\int\limits_{L_2}\frac{\varphi(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1\,d\tau_2}{[\tau_1-(t_1+\bar{n}_1h_1)]^{p_1}[\tau_2-(t_2-\bar{n}_2h_2)]^{p_2}}-$$

$$-\sum_{k_1=0}^{N_1-1}\sum_{k_2=0}^{N_2-1}\varphi(t'_{k_1},t'_{k_2})\int\limits_{t_{k_1}}^{t_{k_1+1}}\int\limits_{t_{k_2}}^{t_{k_2+1}}\frac{d\tau_1\,d\tau_2}{[\tau_1-(t_1+\bar{n}_1h_1)]^{p_1}[\tau_2-(t_2-\bar{n}_2h_2)]^{p_2}}\Big|+$$

$$+\frac{1}{4}\Big|\int\limits_{L_1}\int\limits_{L_1}\frac{\varphi(\tau_1,\tau_2)d\tau_1d\tau_2}{[\tau_1-(t_1+\bar{n}_1h_1)]^{p_1}[\tau_2-(t_1+\bar{n}_2h_2)]^{p_2}}-$$

$$-\sum_{k_1=0}^{N_1-1}\sum_{k_2=0}^{N_2-1}\varphi(t'_{k_1},t'_{k_2})\int\limits_{t_{k_1}}^{t_{k_1+1}}\int\limits_{t_{k_2}}^{t_{k_2+1}}\frac{d\tau_1d\tau_2}{[\tau_1-(t_1+\bar{n}_1h_1)]^{p_1}[\tau_2-(t_1+\bar{n}_2h_2)]^{p_2}}\Big|+$$

$$+\frac{1}{4}\Big|\sum_{k_1=0}^{N_1-1}\sum_{k_2=0}^{N_2-1}|\varphi(t'_{k_1},t'_{k_2})-\tilde{\varphi}(t'_{k_1},t'_{k_2})|\times$$

$$\times\int\limits_{t_{k_1}}^{t_{k_1+1}}\int\limits_{t_{k_2}}^{t_{k_2+1}}\frac{d\tau_1\,d\tau_2}{[\tau_1-(t_1-\bar{n}_1h_1)]^{p_1}[\tau_2-(t_2-\bar{n}_2h_2)]^{p_2}}\Big|+$$

$$+\frac{1}{4}\Big|\sum_{k_1=0}^{N_1-1}\sum_{k_2=0}^{N_2-1}|\varphi(t'_{k_1},t'_{k_2})-\tilde{\varphi}(t'_{k_1},t'_{k_2})|\times$$

$$\times\int\limits_{t_{k_1}}^{t_{k_1+1}}\int\limits_{t_{k_2}}^{t_{k_2+1}}\frac{d\tau_1\,d\tau_2}{[\tau_1-(t_1-\bar{n}_1h_1)^{p_1}][\tau_2-(t_2+\bar{n}_2h_2)]^{p_2}}\Big|+$$

$$+\frac{1}{4}\Big|\sum_{k_1=0}^{N_1-1}\sum_{k_2=0}^{N_2-1}|\varphi(t'_{k_1},t'_{k_2})-\tilde{\varphi}(t'_{k_1},t'_{k_2})|\times$$

$$\times\int\limits_{t_{k_1}}^{t_{k_1+1}}\int\limits_{t_{k_2}}^{t_{k_2+1}}\frac{d\tau_1\,d\tau_2}{[\tau_1-(t_1+\bar{n}_1h_1)]^{p_1}[\tau_2-(t_2-\bar{n}_2h_2)]^{p_2}}\Big|+$$

$$+\frac{1}{4}\Big|\sum_{k_1=0}^{N_1-1}\sum_{k_2=0}^{N_2-1}|\varphi(t'_{k_1},t'_{k_2})-\tilde{\varphi}(t'_{k_1},t'_{k_2})|\times$$

$$\times\int\limits_{t_{k_1}}^{t_{k_1+1}}\int\limits_{t_{k_2}}^{t_{k_2+1}}\frac{d\tau_1\,d\tau_2}{[\tau_1-(t_1+\bar{n}_1h_1)]^{p_1}[\tau_2-(t_2+\bar{n}_2h_2)]^{p_2}}\Big|=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4}r_{ij}.$$

Оценка погрешности $|R_{N_1N_2}(\varphi)|$ складывается из суммы трех групп слагаемых $r_{1j}+r_{2j}+r_{3j}$, причем каждая группа состоит их четырех слагаемых.

В первую группу входят слагаемые вида:

$$r_{11} = \Bigg| \lim_{\eta_1 \to 0, \eta_2 \to 0} \frac{1}{4(p_1-1)!(p_2-1)!} \Bigg[\int\limits_{L_1} \int\limits_{L_2} \frac{D^{(p_1-1,p_2-1)}\varphi(\tau_1,\tau_2)\, d\tau_1\, d\tau_2}{[\tau_1-(t_1-\bar{n}_1\eta_1)][\tau_2-(t_2-\bar{n}_2\eta_2)]} -$$

$$- \int\limits_{L_1} \int\limits_{L_2} \frac{D^{(p_1-1,p_2-1)}\varphi(\tau_1,\tau_2)\, d\tau_1\, d\tau_2}{[\tau_1-(t_1-\bar{n}_1 h_1)][\tau_2-(t_2-\bar{n}_2 h_2)]} \Bigg] \Bigg|.$$

Во вторую группу входят слагаемые вида:

$$r_{21} = \frac{1}{4} \Bigg| \int\limits_{L_1} \int\limits_{L_2} \frac{\varphi(\tau_1,\tau_2)\, d\tau_1\, d\tau_2}{[\tau_1-(t_1-\bar{n}_1 h_1)][\tau_2-(t_2-\bar{n}_2 h_2)]} -$$

$$- \sum_{k_1=0}^{N_1-1} \sum_{k_2=0}^{N_2-1} \varphi(t'_{k_1}, t'_{k_2}) \int\limits_{t_{k_1}}^{t_{k_1+1}} \int\limits_{t_{k_2}}^{t_{k_2+1}} \frac{d\tau_1\, d\tau_2}{[\tau_1-(t_1-\bar{n}_1 h_1)][\tau_2-(t_2-\bar{n}_2 h_2)]} \Bigg|.$$

В третью группу входят слагаемые вида:

$$r_{31} = \frac{1}{4} \Bigg| \sum_{k_1=0}^{N_1-1} \sum_{k_2=0}^{N_2-1} |\varphi(t'_{k_1}, t'_{k_2}) - \tilde{\varphi}(t'_{k_1}, t'_{k_2})| \times$$

$$\times \int\limits_{t_{k_1}}^{t_{k_1+1}} \int\limits_{t_{k_2}}^{t_{k_2+1}} \frac{d\tau_1\, d\tau_2}{[\tau_1-(t_1-\bar{n}_1 h_1)]^{p_1}[\tau_2-(t_2-\bar{n}_2 h_2)]^{p_2}} \Bigg|.$$

Оценим по одному слагаемому из каждой группы. Проведем оценку r_{11} :

$$r_{11} = \frac{1}{4(p_1-1)!(p_2-1)!} \lim_{\eta_1 \to 0, \eta_2 \to 0} \Bigg| \int\limits_{L_1} \int\limits_{L_2} \Big[D^{(p_1-1,p_2-1)}\varphi(\tau_1,\tau_2) \times$$

$$\times \frac{\bar{n}_1(\tau_2-t_2)(h_1-\eta_1) + \bar{n}_2(\tau_1-t_1)(h_2-\eta_2) + \bar{n}_1\bar{n}_2(h_1h_2-\eta_1\eta_2)}{[\tau_1-(t_1-\bar{n}_1\eta_1)][\tau_2-(t_2-\bar{n}_2\eta_2)][\tau_1-(t_1+\bar{n}_1 h_1)][\tau_2-(t_2-\bar{n}_2 h_2)]} \Big] d\tau \Bigg| =$$

$$= \frac{1}{4(p_1-1)!(p_2-1)!} \times \lim_{\eta_1 \to 0, \eta_2 \to 0} \Bigg| \int\limits_{L_1} \int\limits_{L_2} \Big[[\Psi(\tau_1,\tau_2) - \Psi(t_1,\tau_2) -$$

$$- \Psi(\tau_1,t_2) + \Psi(t_1,t_2)] \times$$

$$\times \frac{\bar{n}_1(\tau_2-t_2)(h_1-\eta_1) + \bar{n}_2(\tau_1-t_1)(h_2-\eta_2) + \bar{n}_1\bar{n}_2(h_1h_2-\eta_1\eta_2)}{[\tau_1-(t_1-\bar{n}_1\eta_1)][\tau_2-(t_2-\bar{n}_2\eta_2)][\tau_1-(t_1+\bar{n}_1 h_1)][\tau_2-(t_2-\bar{n}_2 h_2)]} \Big] d\tau \Bigg|,$$

где $d\tau = d\tau_1 d\tau_2$.

Следуя Ф. Д. Гахову [39], заметим, что функция

$$\varphi_{12}(\tau_1,\tau_2)=D^{(p_1-1,p_2-1)}\varphi(\tau_1,\tau_2)-D^{(p_1-1,p_2-1)}\varphi(t_1,\tau_2)-$$

$$-D^{(p_1-1,p_2-1)}\varphi(\tau_1,t_2)+D^{(p_1-1,p_2-1)}\varphi(t_1,t_2)$$

принадлежит классу функций Гельдера $H_{1/2,1/2}$. Тогда

$$|\varphi_{12}(\tau_1,\tau_2)|\le A|t_1-\tau_1|^{1/2}|t_2-\tau_2|^{1/2}$$

и

$$r_{11}\le\Big|\frac{A_{12}}{4(p_1-1)!(p_2-1)!}\Big[h_1\int\limits_{L_1}\frac{(\tau_1-t_1)^{-1/2}d\tau_1}{[\tau_1-(t_1-\bar n_1h_1)]}\int\limits_{L_2}\frac{(\tau_2-t_2)^{1/2}d\tau_2}{[\tau_2-(t_2-\bar n_2h_2)]}+$$

$$+h_2\int\limits_{L_1}\frac{(\tau_1-t_1)^{-1/2}}{[\tau_1-(t_1-\bar n_1h_1)]}\,d\tau_1\int\limits_{L_2}\frac{(\tau_2-t_2)^{-1/2}}{[\tau_2-(t_2-\bar n_2h_2)]}\,d\tau_2+$$

$$+h_1h_2\int\limits_{L_1}\frac{(\tau_1-t_1)^{-1/2}}{[\tau_1-(t_1-\bar n_1h_1)]}\,d\tau_1\int\limits_{L_2}\frac{(\tau_2-t_2)^{-1/2}}{[\tau_2-(t_2-\bar n_2h_2)]}\,d\tau_2\Big]\Big|.$$

Двойной интеграл распался на сумму произведений криволинейных интегралов. Каждый из них оценивается на замкнутых кривых L_1 и L_2. Выделим на кривой L_1 две дуги: L_1' и L_1'', где L_1' – дуга, отсекаемая от L_1 окружностью радиуса h_1 с центром в точке t_1, $L_1''=L_1\setminus L_1'$. Тогда

$$\Big|\int\limits_{L_1'}\frac{d(\tau_1-t_1)}{|\tau_1-t_1|^{1/2}(\tau_1-t_1+\bar n_1h_1)}\Big|\le\frac{A_1}{h_1^{1/2}},$$

$$\Big|\int\limits_{L_1''}\frac{d(\tau_1-t_1)}{|\tau_1-t_1|^{1/2}(\tau_1-t_1+\bar n_1h_1)}\Big|\le\frac{A_1}{h_1^{1/2}}|\ln h_1|.$$

В итоге

$$\Big|\int\limits_{L_1}\frac{d\tau_1}{(\tau_1-t_1)^{1/2}(\tau_1-t_1+\bar n_1h_1)}\Big|\le\frac{A_1}{h_1^{1/2}}|\ln h_1|.$$

Аналогичные рассуждения приводят к оценке

$$\Big|\int\limits_{L_2}\frac{d\tau_2}{(\tau_2-t_2)^{1/2}(\tau_2-t_2+\bar n_2h_2)}\Big|\le\frac{A_2}{h_2^{1/2}}|\ln h_2|.$$

Итак, первое слагаемое из первой группы оценивается неравенством:

$$|r_{11}| \le \frac{A_{12}|\ln h_1||\ln h_2|}{4(p_1-1)!(p_2-1)!}\left\{h_1\left(\frac{h_1}{h_2}\right)^{1/2} + h_2\left(\frac{h_2}{h_1}\right)^{1/2} + (h_1h_2)^{1/2}\right\}.$$

Оценим одно слагаемое из второй группы, полагая, что $t_i \in [t_{j_i}, t_{j_i+1})$, $i = 1, 2$ и что $\max(\max|D^{(1,0)}\varphi(t_1,t_2)|, \max|D^{(0,1)}\varphi(t_1,t_2)|) \le 1$.

Очевидно,

$$|r_{21}| \le \left|\sum_{k_1=0}^{N_1-1}\sum_{k_2=0}^{N_2-1}\int\limits_{t_{k_1}}^{t_{k_1+1}}\int\limits_{t_{k_2}}^{t_{k_2+1}}\frac{|\tau_1-(t_{k_1+1}+t_{k_1})/2|\,|d\tau_1|\,|d\tau_2|}{|\tau_1-(t_1-\bar n_1h_1)|^{p_1}|\tau_2-(t_2-\bar n_2h_2)|^{p_2}}\right| \le$$

$$\le \left|2\sum_{k_1=1}^{N_1}{}'\sum_{k_2=1}^{N_2}{}'\int\limits_{t_{k_1}}^{t_{k_1+1}}\int\limits_{t_{k_2}}^{t_{k_2+1}}\frac{|\tau_1-(t_{k_1+1}+t_{k_1})/2|\,|d\tau_1|\,|d\tau_2|}{|\tau_1-(t_1-\bar n_1h_1)|^{p_1}|\tau_2-(t_2-\bar n_2h_2)|^{p_2}}\right| +$$

$$+2\sum_{k_1=j_1-1}^{j_1+1}\sum_{k_2=j_2-1}^{j_2+1}\int\limits_{t_{k_1}}^{t_{k_1+1}}\int\limits_{t_{k_2}}^{t_{k_2+1}}\frac{|\tau_1-(t_{k_1+1}+t_{k_1})/2|\,|d\tau_1|\,|d\tau_2|}{|\tau_1-(t_1-\bar n_1h_1)|^{p_1}|\tau_2-(t_2-\bar n_2h_2)|^{p_2}}\Bigg| +$$

$$+2\sum_{k_1=j_1-1}^{j_1+1}\sum_{k_2=j_2+2}^{N_2-1}\int\limits_{t_{k_1}}^{t_{k_1+1}}\int\limits_{t_{k_2}}^{t_{k_2+1}}\frac{|\tau_1-(t_{k_1+1}+t_{k_1})/2|\,|d\tau_1|\,|d\tau_2|}{|\tau_1-(t_1-\bar n_1h_1)|^{p_1}|\tau_2-(t_2-\bar n_2h_2)|^{p_2}}\Bigg| +$$

$$+2\sum_{k_1=j_1-1}^{j_1+2}\sum_{k_2=0}^{j_2-2}\int\limits_{t_{k_1}}^{t_{k_1+1}}\int\limits_{t_{k_2}}^{t_{k_2+1}}\frac{|\tau_1-(t_{k_1+1}+t_{k_1})/2|\,|d\tau_1|\,|d\tau_2|}{|\tau_1-(t_1-\bar n_1h_1)|^{p_1}|\tau_2-(t_2-\bar n_2h_2)|^{p_2}}\Bigg| +$$

$$+2\sum_{k_1=0}^{j_1-2}\sum_{k_2=j_2-1}^{j_2+1}\int\limits_{t_{k_1}}^{t_{k_1+1}}\int\limits_{t_{k_2}}^{t_{k_2+1}}\frac{|\tau_1-(t_{k_1+1}+t_{k_1})/2|\,|d\tau_1|\,|d\tau_2|}{|\tau_1-(t_1-\bar n_1h_1)|^{p_1}\,|\tau_2-(t_2-\bar n_2h_2)|^{p_2}}\Bigg| +$$

$$+2\sum_{k_1=j_1+2}^{N_1-1}\sum_{k_2=j_2-1}^{j_2+1}\int\limits_{t_{k_1}}^{t_{k_1+1}}\int\limits_{t_{k_2}}^{t_{k_2+1}}\frac{|\tau_1-(t_{k_1+1}+t_{k_1})/2|\,|d\tau_1|\,|d\tau_2|}{|\tau_1-(t_1-\bar n_1h_1)|^{p_1}|\tau_2-(t_2-\bar n_2h_2)|^{p_2}}\Bigg| =$$

$$= I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5 + I_6,$$

где $\sum_k'$ означает суммирование по всем дугам, за исключением $[t_{j_\ell-1}, t_{j_\ell+2}]$, $l = 1, 2$.

Проведя оценки $I_1 \div I_6$ при $p_1 = p_2 = 2$, получаем:

$$I_1 \le \frac{A}{N_1N_2h_1h_2} \le Ah_1h_2, \ldots, I_6 \le \frac{A}{N_1N_2h_1h_2} \le Ah_1h_2.$$

Следовательно, $r_{21} \le Ah_1h_2$.

Оценим одно из слагаемых последней группы:

$$r_{31} \leq \frac{\varepsilon}{4}\Bigg|\sum_{k_1=0}^{N_1-1}\sum_{k_2=0}^{N_2-1}\int\limits_{t_{k_1}}^{t_{k_1+1}}\int\limits_{t_{k_2}}^{t_{k_2+1}}\frac{|d\tau_1 d\tau_2|}{|\tau_1-(t_1-\bar{n}_1h_1)|^{p_1}|\tau_2-(t_2-\bar{n}_2h_2)|^{p_2}}\Bigg| \leq$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{4}\Bigg|\sum_{k_1=0}^{N_1/2}\int\limits_{t_{k_1+j_1}}^{t_{k_1+j_1+1}}\frac{|d\tau_1|}{|\tau_1-(t_1-\bar{n}_1h_1)|^{p_1}}\Bigg|\Bigg|\sum_{k_2=0}^{N_2/2}\int\limits_{t_{k_2+j_2}}^{t_{k_2+j_2+1}}\frac{|d\tau_2|}{|\tau_2-(t_2-\bar{n}_2h_2)|^{p_1}}\Bigg|.$$

При $p_1 = p_2 = 2$ получаем следующую оценку: $|r_{31}| \leq \varepsilon/h_1h_2$.

Из приведенных неравенств следует оценка погрешности кубатурной формулы (2.4) при $p_1 = p_2 = 2$:

$$|R_{N_1,N_2}(\varphi)| = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4} r_{ij} = A(h_1h_2|\ln h_1|\,|\ln h_2| + \varepsilon/h_1h_2).$$

Теорема доказана.

3. Оптимальные по порядку кубатурные формулы вычисления бигиперсингулярых интегралов в конечных областях

В этом разделе исследуются приближенные методы вычисления бигиперсингулярных интегралов

$$A\varphi = \int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1}\frac{\varphi(\tau_1,\tau_2)}{(\tau_1-t_1)^{p_1}(\tau_2-t_2)^{p_2}}d\tau_1 d\tau_2 \tag{3.1}$$

кубатурными формулами вида

$$A\varphi = \sum_{k=1}^{N}\sum_{l=1}^{M}\sum_{i_1=0}^{\rho_1}\sum_{i_2=0}^{\rho_2} p_{kli_1i_2}(t_1,t_2)\varphi^{(i_1,i_2)}(x_k,y_l)+$$

$$+R_{NM}(t_1,t_2;p_{kli_1i_2}(t_1,t_2);x_k,y_l;\varphi) \tag{3.2}$$

на различных классах функций.

Здесь $\rho_i, i = 1,2,-$ целые числа, определяемые гладкостью функций φ, узлы x_k, y_l расположены в области $\Omega = [-1,1]^2$.

Ниже для простоты обозначений положим $N = M$, и будем использовать прямоугольную сетку узлов $x_{kl} = (x_k, x_l)$, $k, l = 1, 2, \ldots, N$.

Наряду с квадратурной формулой (3.2) будем рассматривать также формулу

$$A\varphi = \sum_{k=1}^{N}\sum_{i_1=0}^{\rho_1}\sum_{i_2=0}^{\rho_2} p_{ki_1i_2}(t_1,t_2)\varphi^{(i_1,i_2)}(M_k)+$$
$$+R_N(t_1,t_2;p_{ki_1i_2}(t_1,t_2);M_k;\varphi), \qquad (3.3)$$

где M_k- узлы, расположенные в области Ω.

Вначале оценим снизу верхнюю грань погрешности кубатурных формул (3.2), (3.3) на различных классах функций.

Исследование начнем с класса функций $\overline{W}^{r,s}(1)$.

Разделим квадрат $[-1,1]^2$ по оси абсцисс на $2N$, а по оси ординат на $2M$ равных частей точками $s_k^{(1)} = -1+k/N, k=0,1,\dots,2N$ и $s_k^{(1)} = -1+k/M, k=0,1,\dots,2M$. Тогда найдется, по крайней мере, N столбцов и M строк, в которых нет узлов к.ф. (3.2). Назовем, следуя первой части книги (с. 223), эти строки и столбцы отмечены. Таким образом, имеется, по крайней мере, N отмеченных столбцов и M отмеченных строк. Обозначим через $\theta_1(k,l)(\theta_2(k,l))$ отношение числа отмеченных столбцов (строк) среди столбцов (строк) с номерами $k,k+1,\dots,l$ к общему числу $(l-k)$ столбцов (строк). На с. 233 первой части книги показано, что существует такой номер $\bar{k}_i$ ($\bar{k}_1 \le 3N/4$, $\bar{k}_2 \le 3M/4$), что $\theta_i(\bar{k}_i,l) > 1/3, i=1,2$. Положим $s_1 = -1+\bar{k}_1/N$, $s_2 = -1+\bar{k}_2/M$ и определим функцию $\varphi^*(\tau_1,\tau_2)$ следующим образом. На всех квадратах $\Delta_{kj} = \left[s_k^{(1)}, s_{k+1}^{(1)}; s_j^{(2)}, s_{j+1}^{(2)}\right]$, у которых или индекс $k \le \bar{k}_1-1$ или индекс $j \le \bar{k}_2-1$, функция $\varphi^*(\tau_1,\tau_2)=0$. Она также равна нулю на квадратах, не являющихся пересечениями отмеченных строк и столбцов. На квадратах Δ_{kj}, у которых $k \ge \bar{k}_1$ и $j \ge \bar{k}_2$ и которые являются пересечениями отмеченных строк и столбцов, функция $\varphi^*(\sigma_1,\sigma_2)$ определяется по формуле $\varphi^*(\tau_1,\tau_2) = A_1((\tau_1-s_k^1)(s_{k+1}^1-\tau_1))^r((\tau_2-s_j^2)(s_{j+1}^2-\tau_2))^s N^{-r}M^{-2s}+$ $+A_2((\tau_1-s_k^1)(s_{k+1}^1-\tau_1))^r((\tau_2-s_j^2)(s_{j+1}^2-\tau_2))^s N^{-2r}M^{-s}$.

Константы $A_i, i=1,2$, подбираются из условия, чтобы $\|\varphi^{*(r,0)}(t_1,t_2)\| \le$ ≤ 1, $\|\varphi^{*(0,s)}(t_1,t_2)\| \le 1$, $||\varphi^{*(r,s)}(t_1,t_2|| \le 1$. Нетрудно видеть,что такие константы существуют. Подставляя функцию $\varphi^*(\tau_1,\tau_2)$ в формулу (2.2) и проводя соответствующие выкладки, получаем оценку $|R_{NM}(\varphi^*)| \ge$ $\ge A\left(\frac{1}{N^{r-p_1+1}}+\frac{1}{M^{s-p_2+1}}\right)$.

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема 3.1. Пусть $\Psi = \bar{W}^{r,s}(1)$. Для всевозможных кубатурных формул вида (3.2) справедлива оценка $\zeta_{NM}[\Psi] \geq A\left(\frac{1}{N^{r-p_1+1}} + \frac{1}{M^{s-p_2+1}}\right)$.

Пусть $\Psi = C_2^r(1)$. В этом случае естественно рассматривать кубатурные формулы вида (3.2) при $N = M$, $p_1 = p_2$ и $\rho_1 + \rho_2 = r$. При этих предположениях справедливо следующее утверждение.

Теорема 3.2. Пусть $\Psi = C_2^r(1)$. Для всевозможных кубатурных формул вида (3.2) при $M = N$, $p_1 = p_2$ и $\rho_1 + \rho_2 = r$ справедливо неравенство

$$\zeta_N[\Psi] \geq \frac{A}{N^{r-2p+2}} = \frac{A}{n^{r/2-p+1}},$$

где n – число узлов кубатурной формулы (3.2).

Доказательство теоремы подобно доказательству теоремы 3.1 и проводится при $N = M$.

Разделим оси координат на $2N$ частей точками $s_k = -1 + k/N$, $k = 0, 1, \ldots, 2N$, и покроем квадрат $[-1, 1]^2$ более мелкими квадратами $\Delta_{kl}, k, l = 0, 1, \ldots, N-1$. Так как кубатурная формула (3.2) имеет N^2 узлов, а число квадратов $\Delta_{kl}, k, l = 0, 1, \ldots, N-1$, равно $2N^2$, имеются квадраты, в которых отсутствуют узлы кубатурной формулы (3.2). Назовем эти квадраты отмеченными. Как и при доказательстве предыдущей теоремы можно показать, что существует такой номер $\overline{k} \leq 3N/4$, что $\theta(\overline{k}, l) > 1/3$. (Определение $\theta(k, l)$ дано в предыдущей теореме).

Введем функцию $\varphi^*(\tau_1, \tau_2)$ определенную на $[-1, 1]^2$ и равную нулю в неотмеченных квадратах и во всех квадратах Δ_{kl}, у которых индексы k и l меньше $\overline{k}$. В отмеченных квадратах Δ_{ij}, у которых индексы i и j не меньше $\overline{k}$, функция $\varphi^*(\tau_1, \tau_2)$ определяется формулой

$$\varphi^*(\tau_1, \tau_2) = A_1((\tau_1 - s_i^1)(s_{i+1}^1 - \tau_1))^r((\tau_2 - s_j^2)(s_{j+1}^2 - \tau_2))^r N^{3r}.$$

Константа A подбирается из условия $\|\varphi^*(\tau_1, \tau_2)\|_{C(\Omega)} = 1, \Omega = [-1, 1]^2$. Нетрудно видеть, что такая константа существует.

После определения функции $\varphi^*(\tau_1, \tau_2)$ практически дословно повторяются выкладки, проделанные при доказательстве теоремы 3.1.

Теорема доказана.

Рассмотрим кубатурные формулы вида

$$A\varphi = \sum_{k=1}^{N} p_k(t_1, t_2)\varphi(M_k) + R_N(t_1, t_2, p_k(t_1, t_2), M_k, \varphi), \tag{3.4}$$

где M_k– узлы кубатурной формулы, расположенные в квадрате $[-1, 1]^2$.

Теорема 3.3. Пусть $\Psi = C_2^r(1)$. Для всевозможных кубатурных формул вида (3.4) справедлива оценка $\zeta_N[\Psi] \geq AN^{-(r-2p+2)/2}$.

Доказательство. Пусть $n = \left[\sqrt{2N}\right] + 1$. Разделим каждую из сторон квадрата $\Omega = [-1, 1; -1, 1]$ на n равных частей точками $s_k^{(1)} = -1 + 2k/n$, $s_k^{(2)} = -1 + 2k/n, k = 0, 1, \ldots, n$. Проведем через эти точки прямые, параллельные координатным осям. В результате получаем n^2 квадратов. Так как $n^2 > 2N$, найдется, по крайней мере, N квадратов, в которых нет узлов кубатурной формулы (3.3). Будем называть квадраты, в которых отсутствуют узлы M_k, отмеченными, и строку отмеченной, если среди всех квадратов, входящих в строку, $n/4+1$ квадрат является отмеченным. Нетрудно видеть, что существуют отмеченные строки. Обозначим через $\theta_1(k, l)$ отношение числа отмеченных строк среди $s_{k+1}, \ldots, s_l$ к общему числу $(l - k)$ этих строк. Повторяя рассуждения, сделанные на с. 233 первой части книги, можно показать, что существует такое $\bar{k}_1 < 4n/5$, для которого $\min\limits_{l > \bar{k}_1} \theta_1(\bar{k}_1, l) \geq 1/8$.

Перейдем теперь к отмеченным строкам. Обозначим через $\theta_2(k, l)$ отношение числа отмеченных квадратов $k_{k+1}, \ldots, k_l$ к общему числу $(l-k)$ квадратов в отмеченной строке. Как и выше, можно показать, что существует такое $\bar{k}_2 < 5n/6$, для которого в отмеченной строке $\min\limits_{l > \bar{k}_2} \theta_2(\bar{k}_2, l) \geq$ $\geq 1/10$.

Положим в интеграле (3.1) значения t_1 и t_2 равными соответственно $t_1 = -1 + (\bar{k}_1 - 1)2/n$ и $t_2 = -1 + (\bar{k}_2 - 1)2/m$. Определим функцию $\varphi^*(\tau_1, \tau_2)$ следующим образом. На всех неотмеченных квадратах, на всех строках с номерами меньше $\bar{k}_1$ и на всех столбцах с номерами меньше $\bar{k}_2$ положим $\varphi^*(\tau_1, \tau_2) = 0$. В оставшихся отмеченных квадратах функцию $\varphi^*(\tau_1, \tau_2)$ определяем по формуле

$$\varphi^*(\tau_1, \tau_2) = A\left((\tau_1 - s_k^{(1)})(s_{k+1}^{(1)} - \tau_1)\right)^r \left((\tau_2 - s_j^{(2)})(s_{j+1}^{(2)} - \tau_2)\right)^r n^{3r}$$

при $s_k^{(1)} \leq \tau_1 \leq s_{k+1}^{(1)}, s_j^{(2)} \leq \tau_2 \leq s_{j+1}^{(2)}$, если $k \geq \bar{k}_1 + 1, j \geq \bar{k}_2 + 1$.

Константа A подбирается из условия, чтобы $||\varphi^{*(r_1,r_2)}(\tau_1, \tau_2)||_C \leq 1$, $r_1 + r_2 = r$. Подставив функцию $\varphi^*(\tau_1, \tau_2)$ в кубатурную формулу (3.3), после несложных вычислений получаем оценку погрешности: $|R_N(\varphi^*)| \geq$ $\geq An^{-r-2+2p} = AN^{-(r+2-2p)/2}$. Отсюда следует, что $R_N[\Psi] \geq AN^{-\frac{r+2-2p}{2}}$.

Теорема доказана.

Построим оптимальные по порядку кубатурные формулы вычисления интеграла (3.1). Для простоты описания кубатурной формулы рассмотрим интеграл $A\varphi$ в предположении, что $p_1 = p_2 = p$.

Покроем область $\Omega = [-1,1]^2$ квадратами $\Delta_{kl} = [x_k, x_{k+1}; x_l, x_{l+1}]$, $k, l = 0, 1, \ldots, N-1$, $x_k = -1 + 2k/N$, $k = 0, 1, \ldots, N$. Введем узлы $x_k^i = x_k + i(x_{k+1} - x_k)/r$, $i = 0, 1, \ldots, r$, $k = 0, 1, \ldots, N-1$. По узлам x_k^i, $i = 0, 1, \ldots, r$, на сегменте $[x_k, x_{k+1}]$ построим интерполяционный полином Лагранжа r- го порядка $L_r(\varphi, [x_k, x_{k+1}])$, $k = 0, 1, \ldots, N-1$.

Через $L_{rr}(\varphi, \Delta_{kl})$ обозначим полином, интерполирующий функцию φ в квадрате Δ_{kl} последовательно по переменным τ_1 и τ_2.

Действие оператора $L_{rr}(\varphi, \Delta_{kl})$ описывается формулой

$$L_{rr}(\varphi, \Delta_{kl}) = L_r^{\tau_1}\left[L_\tau^{\tau_2}\left[\varphi(\tau_1, \tau_2), [x_l, x_{l+1}]\right], [x_k, x_{k+1}]\right],$$

где через $L_r^{t_1}[\varphi(t_1, t_2), [x_k, x_{k+1}]]$ обозначен полином, интерполирующий функцию $\varphi(t_1, t_2)$ по переменной t_1 в сегменте $[x_k, x_{k+1}]$.

Аналогично определяется интерполяция по второй переменной.

Пусть $(t_1, t_2) \in \Delta_{ij}$.

Интеграл (3.1) будем вычислять по кубатурной формуле

$$A\varphi = \sum_{k=0}^{N-1} {\sum_{l=0}^{N-1}}' \int\int\limits_{\Delta_{kl}} \frac{L_{r,r}(\varphi, \Delta_{kl}) d\tau_1 d\tau_2}{(\tau_1 - t_1)^p (\tau_2 - t_2)^p} +$$

$$+ \left(\sum_{k=0}^{i-1} + \sum_{k=i+2}^{N-1}\right) \int \int\limits_{\Delta_{k,j-1} \cup \Delta_{k,j} \cup \Delta_{k,j+1}} \frac{L_{r,3r}(\varphi, \Delta_{k,j-1} \cup \Delta_{k,j} \cup \Delta_{k,j+1}) d\tau_1 d\tau_2}{(\tau_1 - t_1)^p (\tau_2 - t_2)^p} +$$

$$+ \left(\sum_{l=0}^{j-1} + \sum_{l=j+2}^{N-1}\right) \int \int\limits_{\Delta_{i-1,l} \cup \Delta_{i,l} \cup \Delta_{i+1,l}} \frac{L_{3r,r}(\varphi, \Delta_{i-1,l} \cup \Delta_{i,l} \cup \Delta_{i+1,l})}{(\tau_1 - t_1)^p (\tau_2 - t_2)^p} d\tau_1 d\tau_2 +$$

$$+ \int\int\limits_{\Delta_{ij}^*} \frac{L_{3r,3r}(\varphi, \Delta_{i,j}^*) d\tau_1 d\tau_2}{(\tau_1 - t_1)^p (\tau_2 - t_2)^p} + R_N(\varphi). \qquad (3.5)$$

Здесь $\Delta_{ij}^* = [x_{i-1}, x_{i+2}; x_{j-1}, x_{j+2}]$, $\sum\sum'$ означает суммирование по (k, l) таким, что $k \neq i-1, i, i+1$ и $l \neq j-1, j, j+1$.

Оценим погрешность кубатурной формулы (3.5).

Нетрудно видеть, что

$$|R_N(\varphi)| \leq \sum_{k=0}^{N-1} {\sum_{l=0}^{N-1}}' \left| \int\int\limits_{\Delta_{kl}} \frac{\psi_{r,r}(\varphi, \Delta_{kl}) d\tau_1 d\tau_2}{(\tau_1 - t_1)^p (\tau_2 - t_2)^p} \right| +$$

$$+\left(\sum_{k=0}^{i-2}+\sum_{k=i+2}^{N-1}\right)\left|\int\int_{\Delta_{k,j-1}\cup\Delta_{k,j}\cup\Delta_{k,j+1}}\frac{\psi_{r,3r}(\varphi,\Delta_{k,j-1}\cup\Delta_{k,j}\cup\Delta_{k,j+1})d\tau_1 d\tau_2}{(\tau_1-t_1)^p(\tau_2-t_2)^p}\right|+$$

$$+\left(\sum_{l=0}^{j-2}+\sum_{l=j+2}^{N-1}\right)\left|\int\int_{\Delta_{i-1,l}\cup\Delta_{i,l}\cup\Delta_{i+1,l}}\frac{\psi_{3r,r}(\varphi,\Delta_{i-1,l}\cup\Delta_{i,l}\cup\Delta_{i+1,l})d\tau_1 d\tau_2}{(\tau_1-t_1)^p(\tau_2-t_2)^p}\right|+$$

$$+\left|\int\int_{\Delta_{ij}^*}\frac{\psi_{3r,3r}(\varphi,\Delta_{ij}^*)d\tau_1 d\tau_2}{(\tau_1-t_1)^p(\tau_2-t_2)^p}\right|=r_1+\cdots+r_4, \qquad (3.6)$$

где $\psi_{r,r}(\varphi,\Delta_{kl})=\varphi(\tau_1,\tau_2)-L_{r,r}(\varphi,\Delta_{kl})$.

Оценим каждое из выражений $r_1 \div r_4$ в отдельности.

Очевидно,

$$r_1\le\left(\sum_{k=0}^{i-2}\sum_{l=0}^{j-2}+\sum_{k=0}^{i-2}\sum_{l=j+2}^{N-1}+\sum_{k=i+2}^{N-1}\sum_{l=0}^{j-2}+\sum_{k=i+2}^{N-1}\sum_{l=j+2}^{N-1}\right)\times$$

$$\times\left|\int\int_{\Delta_{kl}}\frac{\psi_{r,r}(\varphi,\Delta_{kl})d\tau_1 d\tau_2}{(\tau_1-t_1)^p(\tau_2-t_2)^p}\right|=r_{11}+\cdots+r_{14}.$$

Так как каждая из сумм $r_{11}\div r_{14}$ оценивается одинаково, то остановимся на первой:

$$r_{11}\le\sum_{k=0}^{i-2}\sum_{l=0}^{j-2}\frac{N^{2p}}{4^p(i-k)^p(j-l)^p}\int\int_{\Delta_{kl}}|\psi_{r,r}(\varphi,\Delta_{kl})|d\tau_1 d\tau_2\le BN^{-(r-2p+2)}.$$

Таким образом,

$$r_1\le BN^{-(r-2p+2)}. \qquad (3.7)$$

Приступим к оценке r_2.

Для этого, предварительно зафиксировав произвольное значение k, $0\le k\le i-2$, $i+2\le k\le N-1$, оценим интеграл

$$r_{2,k}=\left|\int\int_{\Delta_{k,j-1}\cup\Delta_{k,j}\cup\Delta_{k,j+1}}\frac{\psi_{r,3r}(\varphi,\Delta_{k,j-1}\cup\Delta_{k,j}\cup\Delta_{k,j+1})d\tau_1 d\tau_2}{(\tau_1-t_1)^p(\tau_2-t_2)^p}\right|.$$

Пусть $h=\min\left(|t_2-x_{j-1}|,|t_2-x_{j-2}|\right)$ и пусть $h=|x_{j-1}-t_2|$. Тогда предыдущий интеграл можно представить в виде суммы

$$r_{2,k}\le\left|\int\int_{d_{2,k}^1}\frac{\psi_{r,3r}(\varphi,\Delta_{k,j-1}\cup\Delta_{k,j}\cup\Delta_{k,j+1})d\tau_1 d\tau_2}{(\tau_1-t_1)^p(\tau_2-t_2)^p}\right|+$$

$$+\left|\int\int\limits_{d^2_{2,k}} \frac{\psi_{r,3r}(\varphi,\Delta_{k,j-1}\cup\Delta_{k,j}\cup\Delta_{k,j+1})d\tau_1 d\tau_2}{(\tau_1-t_1)^p(\tau_2-t_2)^p}\right| = r^1_{2,k}+r^2_{2,k}. \qquad (3.8)$$

Здесь $d^1_{2,k}=[x_k,x_{k+1};x_{j-1},t_2+h]$, $d^2_{2,k}=[x_k,x_{k+1};x_{j-1},x_{j+2}]\setminus d^1_{2,k}$.
Оценим каждый из интегралов $r^1_{2,k}$ и $r^2_{2,k}$ в отдельности.
Используя определение гиперсингулярного интеграла, имеем:

$$r^1_{2,k}\le$$

$$\le\left|\sum_{v=0}^{p-1}\left[\frac{A_v}{(x_{j-1}-t_2)^{p-1-v}}\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}}\frac{\psi^{(0,v)}_{r,3r}(\varphi,\Delta_{k,j-1}\cup\Delta_{k,j}\cup\Delta_{k,j+1})(\tau_1,x_{j-1})d\tau_1}{(\tau_1-t_1)^p(\tau_2-t_2)}+\right.\right.$$

$$\left.+\frac{B_k}{h^{p-1-v}}\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}}\frac{\psi^{(0,v)}_{r,3r}(\varphi,\Delta_{k,j-1}\cup\Delta_{k,j}\cup\Delta_{k,j+1})(\tau_1,x_{j+2})d\tau_1}{(\tau_1-t_1)^p(\tau_2-t_2)}\right]+\cdots+$$

$$+\left|A_p\int\int\limits_{d^1_{2,k}}\frac{\psi^{(0,p-1)}_{r,3r}(\varphi,\Delta_{k,j-1}\cup\Delta_{k,j}\cup\Delta_{k,j+1})(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2}{(\tau_1-t_1)^p(\tau_2-t_2)}\right|\le$$

$$\le\sum_{v=0}^{p-1}\left[\frac{A_vN^{2p-2-v}}{(i-k)^p}\left|\psi^{(0,v)}_{r,3r}(\varphi,\Delta_{k,j-1}\cup\Delta_{k,j}\cup\Delta_{k,j+1})(\tau_1,x_{j-1})\right|+\right.$$

$$\left.+\frac{B_vN^{2p-2-v}}{(i-k)^p}\left|\psi^{(0,v)}_{r,3r}(\varphi,\Delta_{k,j-1}\cup\Delta_{k,j}\cup\Delta_{k,j+1})(\tau_1,x_{j+2})\right|\right]+$$

$$+\left|A_p\int\int\limits_{d^1_{2,k}}\left[\frac{\psi^{(0,p-1)}_{r,3r}(\varphi,\Delta_{k,j-1}\cup\Delta_{k,j}\cup\Delta_{k,j+1})(\tau_1,\tau_2)}{(\tau_1-t_1)^p(\tau_2-t_2)}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{\psi^{(0,p-1)}_{r,3r}(\varphi,\Delta_{k,j-1}\cup\Delta_{k,j}\cup\Delta_{k,j+1})(\tau_1,t_2)d\tau_1 d\tau_2}{(\tau_1-t_1)^p(\tau_2-t_2)}\right]\right|\le$$

$$\le AN^{-(r-2p+2)}. \qquad (3.9)$$

Для оценки интеграла $r^2_{2,k}$ заметим, что

$$r^2_{2,k}\le\frac{BN^p}{(x_{i+2}-t_1)^p}\int\int\limits_{d^2_{2,k}}|\psi_{r,3r}(\varphi,\Delta_{k,j-1}\cup\Delta_{k,j}\cup\Delta_{k,j+1})d\tau_1 d\tau_2|\le$$

$$\le BN^{-(r-2p+2)}. \qquad (3.10)$$

Из неравенства (3.8) − (3.10) следует, что

$$r_2 \le BN^{-(r-2p+2)}. \tag{3.11}$$

Аналогичная оценка справедлива и для r_3 :

$$r_3 \le BN^{-(r-2p+2)}. \tag{3.12}$$

Приступим к оценке интеграла r_4. Пусть $h_1 = \min(|t_1 - x_{i-1}|, |x_{i+2}- -t_2|)$, $h_2 = \min(|t_2 - x_{j-1}|, |x_{j+2} - t_2|)$. Для определенности положим $h_1 = |x_{i-1} - t|$, $h_2 = |x_{j-1} - t_2|$. Пусть $\Delta^1_{ij} = [x_{i-1}, t_1 + h_1; x_{j-1}, t_2 + h_2]$, $\Delta^2_{ij} = \Delta^*_{ij} \setminus \Delta^1_{ij}$.

Тогда

$$r_4 \le \left| \int\limits_{\Delta^1_{ij}}\int \frac{\psi_{3r,3r}(\varphi, \Delta^*_{ij}) d\tau_1 d\tau_2}{(\tau_1 - t_1)^p (\tau_2 - t_2)^p} \right| +$$

$$+ \left| \int\limits_{\Delta^2_{ij}}\int \frac{\psi_{3r,3r}(\varphi, \Delta^*_{ij}) d\tau_1 d\tau_2}{(\tau_1 - t_1)^p (\tau_2 - t_2)^p} \right| = r_{41} + r_{42}.$$

Для оценки интеграла r_{41} воспользуемся определением гиперсингулярного интеграла и свойствами сингулярного интеграла. В результате имеем:

$$r_{41} \le \sum_{v_1=0}^{p-1}\sum_{v_2=0}^{p-1} \left[\left| \frac{A_{v_1 v_2} \psi^{(v_1,v_2)}_{3r,3r}(\varphi, \Delta^*_{ij})(x_{i-1}, x_{j-1})}{h_1^{p-1-v_1} h_2^{p-1-v_2}} \right| + \right.$$

$$+ \left| \frac{B_{v_1,v_2} \psi^{v_1,v_2}_{3r,3r}(\varphi, \Delta^*_{ij})(x_{i-1}, t_2 + h_2)}{h_1^{p-1-v_1} h_2^{p-1-v_2}} \right| +$$

$$+ \left| \frac{C_{v_1 v_2} \psi^{(v_1,v_2)}_{3r,3r}(\varphi, \Delta^*_{ij})(t_1 + h_1, x_{j-1})}{h_1^{p-1-v_1} h_2^{p-1-v_2}} \right| +$$

$$\left. + \left| \frac{D_{v_1 v_2} \psi^{(v_1,v_2)}_{3r,3r}(\varphi, \Delta^*_{ij})(t_1 + h_1, t_2 + h_2)}{h_1^{p-1-v_1} h_2^{p-1-v_2}} \right| \right] +$$

$$+B \left| \int\limits_{\Delta^1_{ij}}\int \frac{\psi^{(p-1,p-1)}_{3r,3r}(\varphi, \Delta^*_{ij})(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2}{(\tau_1 - t_1)(\tau_2 - t_2)} \right| \le$$

$$\le AN^{(-r-2p+2)} + B \left| \int\limits_{\Delta^1_{ij}}\int \frac{\psi^{(p-1,p-1)}_{3r,3r}(\varphi, \Delta^*_{ij})(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2}{(\tau_1 - t_1)(\tau_2 - t_2)} \right|.$$

Обозначим $\psi_{3r,3r}^{(p-1,p-1)}(\varphi,\Delta_{ij}^{*})(\tau_1,\tau_2)$ через $g(\tau_1,\tau_2)$. Функция $g(\tau_1,\tau_2)$ имеет частные производные до $(r-2p+2)$-го порядка.

Используя симметричность области Δ_{ij}^{1} и свойства сингулярных интегралов, предыдущий интеграл можно представить в виде

$$\left|\int\int\limits_{\Delta_{ij}^{1}} \frac{g(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2}{(\tau_1-t_1)(\tau_2-t_2)}\right| =$$

$$= \left|\int\int\limits_{\Delta_{ij}^{1}} \frac{g(\tau_1,\tau_2)-g(t_1,\tau_2)-g(\tau_1,t_2)+g(t_1,t_2)}{(\tau_1-t_1)(\tau_2-t_2)} d\tau_1 d\tau_2\right|.$$

Нетрудно видеть, что

$$|g(\tau_1,\tau_2)-g(t_1,\tau_2)-g(\tau_1,t_2)+g(t_1,t_2)| \le$$

$$\le |g'(t_1+\theta_1(\tau_1-t_1),\tau_2)||\tau_1-t_1| + |g'(t_1+\theta_2(\tau_1-t_1),t_2)||\tau_1-t_1| \le$$
$$\le AN^{-(r-2p+1)}|\tau_1-t_1|.$$

Аналогично,

$$|g(\tau_1,\tau_2)-g(t_1,\tau_2)-g(\tau_1,t_2)+g(t_1,t_2)| \le$$

$$\le AN^{-(r-2p+1)}|\tau_2-t_2|.$$

Следовательно,

$$|g(\tau_1,\tau_2)-g(t_1,\tau_2)-g(\tau_1,t_2)+g(t_1,t_2)| \le$$

$$\le AN^{-(r-2p+1)}(|\tau_1-t_1||\tau_2-t_2|)^{1/2}.$$

Воспользовавшись этим неравенством и проведя элементарные выкладки, приходим к неравнству:

$$\left|\int\int\limits_{\Delta_{ij}^{1}} \frac{g(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2}{(\tau_1-t_1)(\tau_2-t_2)}\right| \le \frac{A}{N^{r-2p+2}}. \tag{3.13}$$

Осталось оценить интеграл r_{42}. Воспользовавшись тем, что в области Δ_{ij}^{2} $|\tau_1-t_1| \ge h_1$, $|\tau_1-t_2| \ge h_2$, имеем:

$$r_{42} \le AN^{-(r-2p+2)}. \tag{3.14}$$

Собирая оценки (3.6) $-$ (3.14), приходим к неравенству:

$$|R_N(\varphi)| \leq AN^{-(r-2p+2)} = \frac{A}{n^{r/2-p+1}},$$

где $n = O(N^2)-$ число узлов кубатурной формулы (3.5).

Так как $\varphi-$ произвольная функция из функционального множества $C_2^r(M)$, окончательно имеем

$$R_N[C_2^r(M)] \leq \frac{A}{n^{r/2-p+1}}. \tag{3.15}$$

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема 3.4. Пусть $\Psi = C_2^r(M)$. Кубатурная формула (3.5) имеет погрешность

$$R_N[\Psi] \leq AN^{-(r-2p+2)}.$$

Из сопоставления утверждений теорем 3.2 и 3.4 следует

Теорема 3.5. Среди всевозможных кубатурных формул вида (3.2) формула (3.5) является оптимальной по порядку.

Рассмотрим функцию $\varphi(\tau_1, \tau_2) \in \overline{W}^{r_1 r_2}(1)$ на топологическом произведении двух конечных отрезков $[-1, 1] \times [-1, 1]$. Предположим, что функция $\varphi(\tau_1, \tau_2)$ задана своими приближенными значениями $\tilde{\varphi}(\tau_1, \tau_2)$, причем $|\varphi(\tau_1, \tau_2) - \tilde{\varphi}(\tau_1, \tau_2)| \leq \varepsilon$.

Для интеграла Адамара

$$A\varphi = \int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1} \frac{\varphi(\tau_1, \tau_2)}{(\tau_1 - t_1)^{p_1}(\tau_2 - t_2)^{p_2}}\, d\tau_1\, d\tau_2 \tag{3.16}$$

построим кубатурную формулу следующего вида:

$$A\varphi = \frac{1}{4}\sum_{k_1=0}^{N_1-1}\sum_{k_2=0}^{N_2-1} \tilde{\varphi}(t'_{k_1}, t'_{k_2}) \int\limits_{t_{k_1}}^{t_{k_1+1}}\int\limits_{t_{k_2}}^{t_{k_2+1}} \Big[\frac{1}{[\tau_1 - (t_1 - ih_1)]^{p_1}[\tau_2 - (t_2 - ih_2)]^{p_2}} +$$

$$+ \frac{1}{[\tau_1 - (t_1 - ih_1)]^{p_1}[\tau_2 - (t_2 + ih_2)]^{p_2}} + \frac{1}{[\tau_1 - (t_1 + ih_1)]^{p_1}[\tau_2 - (t_2 - ih_2)]^{p_2}} +$$

$$+ \frac{1}{[\tau_1 - (t_1 + ih_1)]^{p_1}[\tau_2 - (t_2 + ih_2)]^{p_2}}\Big]\, d\tau_1\, d\tau_2 + R_{N_1 N_2}(\varphi), \tag{3.17}$$

где точки t_k получены путем равномерного разбиения отрезков на N частей: $t_k = -1 + 2k/N (k = 0, 1, \ldots, N); t'_k = (t_k + t_{k+1})/2; h_1 = N^{-1/p_1}, h_2 = = N^{-1/p_2}$.

Теорема 3.6. Пусть $\varphi(\tau_1,\tau_2)\in \overline{W}^{r_1r_2}(1)$ и $|\varphi(\tau_1,\tau_2)-\tilde{\varphi}(\tau_1,\tau_2)|\le\varepsilon$. Для интеграла Адамара (3.1) кубатурная формула (3.17) при $r_i\ge p_i$, $h_i=h$ и $p_i=2, i=1,2$, имеет погрешность

$$|R_{NN}(\varphi)|\le A\left(h|\ln h|+\frac{\varepsilon}{h^2}+\frac{1}{Nh^2}\right).$$

Доказательство. Представим интеграл (3.1) в виде суммы

$$A\varphi=\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1}\frac{\varphi(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1\,d\tau_2}{(\tau_1-t_1)^{p_1}(\tau_2-t_2)^{p_2}}=\lim_{\eta\to 0}\Bigg[\int\limits_{-1}^{t_1-\eta}\int\limits_{-1}^{t_2-\eta}\frac{\varphi(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1\,d\tau_2}{(\tau_1-t_1)^{p_1}(\tau_2-t_2)^{p_2}}+$$

$$+\int\limits_{t_1+\eta}^{1}\int\limits_{-1}^{t_2-\eta}\frac{\varphi(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1\,d\tau_2}{(\tau_1-t_1)^{p_1}(\tau_2-t_2)^{p_2}}+\int\limits_{-1}^{t_1-\eta}\int\limits_{t_2+\eta}^{1}\frac{\varphi(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1\,d\tau_2}{(\tau_1-t_1)^{p_1}(\tau_2-t_2)^{p_2}}+$$

$$+\int\limits_{t_1+\eta}^{1}\int\limits_{t_2+\eta}^{1}\frac{\varphi(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1\,d\tau_2}{(\tau_1-t_1)^{p_1}(\tau_2-t_2)^{p_2}}+\frac{\psi(\eta)}{\eta^{p_1+p_2-2}}\Bigg].\qquad(3.18)$$

По определению интеграла Адамара функция $\psi(\eta)$ выбирается таким образом, чтобы предел существовал. Доказательство теоремы при произвольных p_1 и p_2 трудоемкое, поэтому дальнейшие рассуждения проведем в предположении $p_1=p_2=2$. Это доказательство отличается от общего случая лишь меньшим числом слагаемых в каждом интеграле.

Нетрудно видеть, что

$$I_1=\int\limits_{-1}^{t_1-\eta}\int\limits_{-1}^{t_2-\eta}\frac{\varphi(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1\,d\tau_2}{(\tau_1-t_1)^2(\tau_2-t_2)^2}=\int\limits_{-1}^{t_1-\eta}\int\limits_{-1}^{t_2-\eta}\frac{D^{(1,1)}\varphi(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1\,d\tau_2}{(\tau_1-t_1)(\tau_2-t_2)}+$$

$$+\int\limits_{-1}^{t_1-\eta}\frac{D^{(1,0)}\varphi(\tau_1,-1)\,d\tau_1}{(\tau_1-t_1)(1+t_2)}+\int\limits_{-1}^{t_2-\eta}\frac{D^{(0,1)}\varphi(-1,\tau_2)\,d\tau_2}{(1+t_1)(\tau_2-t_2)}+\frac{\varphi(-1,-1)}{(1+t_1)(1+t_2)}+\psi_1(\eta).$$

Представляя аналогичным образом остальные слагаемые правой части формулы (3.18), имеем:

$$\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1}\frac{\varphi(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1\,d\tau_2}{(\tau_1-t_1)^2(\tau_2-t_2)^2}=\lim_{\eta\to 0}\Bigg[\int\limits_{-1}^{t_1-\eta}\int\limits_{-1}^{t_2-\eta}\frac{D^{(1,1)}\varphi(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1\,d\tau_2}{(\tau_1-t_1)(\tau_2-t_2)}+$$

$$+\int\limits_{t_1+\eta}^{1}\int\limits_{-1}^{t_2-\eta}\frac{D^{(1,1)}\varphi(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1\,d\tau_2}{(\tau_1-t_1)(\tau_2-t_2)}+\int\limits_{-1}^{t_1-\eta}\int\limits_{t_2+\eta}^{1}\frac{D^{(1,1)}\varphi(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1\,d\tau_2}{(\tau_1-t_1)(\tau_2-t_2)}+$$

$$+\int\limits_{t_1+\eta}^{1}\int\limits_{t_2+\eta}^{1}\frac{D^{(1,1)}\varphi(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1\,d\tau_2}{(\tau_1-t_1)(\tau_2-t_2)}\Bigg]+\frac{1}{-1-t_2}\int\limits_{-1}^{1}\frac{\varphi'_{\tau_1}(\tau_1,-1)\,d\tau_1}{\tau_1-t_1}-$$

$$-\frac{1}{1-t_2}\int\limits_{-1}^{1}\frac{\varphi'_{\tau_1}(\tau_1,1)\,d\tau_1}{\tau_1-t_1}+\frac{1}{-1-t_1}\int\limits_{-1}^{1}\frac{\varphi'_{\tau_2}(-1,\tau_2)\,d\tau_2}{\tau_2-t_2}-$$

$$-\frac{1}{1-t_1}\int\limits_{-1}^{1}\frac{\varphi'_{\tau_2}(1,\tau_2)\,d\tau_2}{\tau_2-t_2}+\frac{A_1\varphi(-1,-1)}{(1+t_1)(1+t_2)}+$$

$$+\frac{A_2\varphi(-1,1)}{(1+t_1)(1-t_2)}+\frac{A_3\varphi(1,-1)}{(1-t_1)(1+t_2)}+\frac{A_4\varphi(1,1)}{(1-t_1)(1-t_2)},$$

где $A_i=\pm 1$, $i=1,2,3,4$.

Оценка погрешности кубатурной формулы (3.18) имеет вид

$$|R_{N_1N_2}(\varphi)|\le$$

$$\le\Bigg|\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1}\frac{\varphi(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1\,d\tau_2}{(\tau_1-t_1)^2(\tau_2-t_2)^2}-\frac{1}{4}\Bigg[\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1}\frac{\varphi(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1\,d\tau_2}{(\tau_1-t_1+ih)^2(\tau_2-t_2+ih)^2}+$$

$$+\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1}\frac{\varphi(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1\,d\tau_2}{(\tau_1-t_1+ih)^2(\tau_2-t_2-ih)^2}+\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1}\frac{\varphi(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1\,d\tau_2}{(\tau_1-t_1-ih)^2(\tau_2-t_2+ih)^2}+$$

$$+\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1}\frac{\varphi(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1\,d\tau_2}{(\tau_1-t_1-ih)^2(\tau_2-t_2-ih)^2}\Bigg]\Bigg|+$$

$$+\frac{1}{4}\sum_{k_1=0}^{N_1-1}\sum_{k_2=0}^{N_2-1}\Bigg|\int\limits_{t_{k_1}}^{t_{k_1+1}}\int\limits_{t_{k_2}}^{t_{k_2+1}}\Big[\frac{\varphi(\tau_1,\tau_2)-\varphi(t'_{k_1},t'_{k_2})}{(\tau_1-t_1+ih)^2(\tau_2-t_2+ih)^2}+$$

$$+\frac{\varphi(\tau_1,\tau_2)-\varphi(t'_{k_1},t'_{k_2})}{(\tau_1-t_1+ih)^2(\tau_2-t_2-ih)^2}+\frac{\varphi(\tau_1,\tau_2)-\varphi(t'_{k_1},t'_{k_2})}{(\tau_1-t_1-ih)^2(\tau_2-t_2+ih)^2}+$$

$$+\frac{\varphi(\tau_1,\tau_2)-\varphi(t'_{k_1},t'_{k_2})}{(\tau_1-t_1-ih)^2(\tau_2-t_2-ih)^2}\Big]\,d\tau_1\,d\tau_2\Bigg|+$$

$$+\frac{1}{4}\sum_{k_1=0}^{N_1-1}\sum_{k_2=0}^{N_2-1}\Big|\Big\{\Big(\varphi(t'_{k_1},t'_{k_2})-\tilde{\varphi}(t'_{k_1},t'_{k_2})\Big)\times$$

$$\times\int\limits_{t_{k_1}}^{t_{k_1+1}}\int\limits_{t_{k_2}}^{t_{k_2+1}}\Bigg[\frac{1}{(\tau_1-t_1+ih)^2(\tau_2-t_2+ih)^2}+\frac{1}{(\tau_1-t_1+ih)^2(\tau_2-t_2-ih)^2}+$$

$$+\frac{1}{(\tau_1-t_1-ih)^2(\tau_2-t_2+ih)^2}+\frac{1}{(\tau_1-t_1-ih)^2(\tau_2-t_2-ih)^2}\Bigg]\,d\tau_1 d\tau_2\Big\}\Big| =$$

$$=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4} R_{ij}.$$

Оценим по одному слагаемому из каждой группы. Вначале оценим R_{11} (выражения R_{1i}, $i=2,3,4$, оцениваются аналогично). Нетрудно видеть, что $R_{11}\le R_{111}+R_{112}+R_{113}$, где

$$R_{111}=\Bigg|\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1}\frac{\varphi^{(1,1)}_{\tau_1\tau_2}(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1\,d\tau_2}{(\tau_1-t_1)(\tau_2-t_2)}-\frac{1}{4}\Bigg[\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1}\frac{\varphi^{(1,1)}_{\tau_1\tau_2}(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1\,d\tau_2}{(\tau_1-t_1+ih)(\tau_2-t_2+ih)}+$$

$$+\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1}\frac{\varphi^{(1,1)}_{\tau_1\tau_2}(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1\,d\tau_2}{(\tau_1-t_1+ih)(\tau_2-t_2-ih)}+\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1}\frac{\varphi^{(1,1)}_{\tau_1\tau_2}(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1\,d\tau_2}{(\tau_1-t_1-ih)(\tau_2-t_2+ih)}+$$

$$+\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1}\frac{\varphi^{(1,1)}_{\tau_1\tau_2}(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1\,d\tau_2}{(\tau_1-t_1-ih)(\tau_2-t_2-ih)}\Bigg]\Bigg|;$$

$$R_{112}=\Big|\frac{1}{-1-t_2}\int\limits_{-1}^{1}\frac{\varphi'_{\tau_1}(\tau_1,-1)}{\tau_1-t_1}\,d\tau_1-\frac{1}{4}\Big[\frac{1}{-1-t_2+ih}\int\limits_{-1}^{1}\frac{\varphi'_{\tau_1}(\tau_1,-1)}{\tau_1-t_1+ih}\,d\tau_1+$$

$$+\frac{1}{1-t_2-ih}\int\limits_{-1}^{1}\frac{\varphi'_{\tau_1}(\tau_1,1)}{\tau_1-t_1+ih}\,d\tau_1+\frac{1}{-1-t_1+ih}\int\limits_{-1}^{1}\frac{\varphi'_{\tau_2}(-1,\tau_2)}{\tau_2-t_2}\,d\tau_2+$$

$$+\frac{1}{1-t_1-ih}\int\limits_{-1}^{1}\frac{\varphi'_{\tau_2}(1,\tau_2)}{\tau_2-t_2}\,d\tau_2]|;$$

$$R_{113}=|\varphi(1,1)|\Big|\frac{1}{(1-t_1)(1-t_2)}-\frac{1}{4}\Big[\frac{1}{(1-t_1+ih)(1-t_2+ih)}+$$

$$+\frac{1}{(1-t_1+ih)(1-t_2-ih)}+\frac{1}{(1-t_1-ih)(1-t_2+ih)}+$$

$$+\frac{1}{(1-t_1-ih)(1-t_2-ih)}\Big]\Big|.$$

Оценим R_{111}.

Зафиксируем $\Delta>0$. Будем считать, что $h\ll\Delta$; $-1+\Delta\le t_1,t_2\le$ $\le 1-\Delta$.

Тогда

$$R_{111} =$$

$$= h^2 \Big| \int\limits_{-1}^{1} \int\limits_{-1}^{1} \varphi^{(1,1)}_{\tau_1\tau_2}(\tau_1,\tau_2) \frac{[(\tau_1-t_1)^2+(\tau_2-t_2)^2+h^2]\,d\tau_1\,d\tau_2}{(\tau_1-t_1)(\tau_2-t_2)[(\tau_1-t_1)^2+h^2][(\tau_2-t_2)^2+h^2]} \Big| +$$

$$+ \left| \int\limits_{-1}^{1} \int\limits_{-1}^{1} \frac{\varphi^{(1,1)}_{\tau_1\tau_2}(\tau_1,\tau_2)(ih(\tau_1-t_1)(\tau_2-t_2)^2+ih(\tau_2-t_2)(\tau_1-t_1)^2)}{(\tau_1-t_1)(\tau_2-t_2)[(\tau_1-t_1)^2+h^2][(\tau_2-t_2)^2+h^2]} d\tau_1 d\tau_2 \right|.$$

Второй интеграл оценивается величиной $Ah|\ln h|$.

Пусть $h_i = \min(|1-t_i|, |1+t_i|)$, $i = 1,2$. Пусть $h_1 = t_1+1$, $h_2 = t_2+1$. Введем следующие области:

$$\Delta_0 = [t_1-h, t_1+h; t_2-h, t_2+h],$$

$$\Delta_1 = [t_1-h, t_1+h; -1,1] \cup [-1,1; t_2-h, t_2+h] \setminus \Delta_0,$$

$$\Delta_2 = [t_1-h_1, t_1+h_1; t_2-h_2, t_2+h_2] \setminus (\Delta_0 \cup \Delta_1),$$

$$\Delta_3 = ([t_1-h_1, t_1+h_1; -1,1] \cup [-1,1; t_2-h_2, t_2+h_2]) \setminus (\Delta_0 \cup \Delta_1 \cup \Delta_2),$$

$$\Delta_4 = [-1,1]^2 \setminus ([t_1-h_1, t_1+h_1; -1,1] \cup [-1,1; t_2-h_2, t_2+h_2]).$$

Предыдущий интеграл представим в виде
$\sum\limits_{i=0}^{4} \int\int\limits_{\Delta_i} \psi(\tau_1,\tau_2) f(\tau_1,\tau_2) d\tau_1 d\tau_2$, где $\psi(\tau_1,\tau_2) = \varphi^{(1,1)}_{\tau_1\tau_2}(\tau_1,\tau_2)$,

$$f(\tau_1,\tau_2) = \frac{[(\tau_1-t_1)^2+(\tau_2-t_2)^2+h^2] d\tau_1 d\tau_2}{(\tau_1-t_1)(\tau_2-t_2)[(\tau_1-t_1)^2+h^2][(\tau_2-t_2)^2+h^2]}.$$

Используя свойства полисингулярных интегралов, имеем:

$$\left| \int\int\limits_{\Delta_0} \psi(\tau_1,\tau_2) f(\tau_1,\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \right| =$$

$$= \left| \int\int\limits_{\Delta_0} (\psi(\tau_1,\tau_2) - \psi(t_1,\tau_2) - \psi(\tau_1,t_2) + \psi(t_1,t_2)) f(\tau_1,\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \right| \leq$$

$$\leq A \int\int\limits_{\Delta_0} |\tau_1-t_1|^{1/2} |\tau_2-t_2|^{1/2} ||f(\tau_1,\tau_2)| d\tau_1 d\tau_2 \leq \frac{A}{h};$$

$$\left| \int\int\limits_{\Delta_1} \psi(\tau_1,\tau_2) f(\tau_1,\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \right| \leq 4 \left| \int\limits_{\Delta_1^1} (\psi(\tau_1,\tau_2) - \psi(t_2,t_2)) f(\tau_1,\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \right| \leq$$

$$\leq 4A\int\limits_{\Delta_1^1}|\tau_2-t_2||f(\tau_1,\tau_2)|d\tau_1 d\tau_2 \leq \frac{A}{h},$$

где $\Delta_1^1=[-1,t_1-h;t_2-h,t_2+h]$;

$$\left|\int\int\limits_{\Delta_2}\psi(\tau_1,\tau_2)f(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2\right| \leq$$

$$\leq A\int\int\limits_{\Delta_2}|\psi(\tau_1,\tau_2)-\psi(t_1,\tau_2)-\psi(\tau_1,t_2)+\psi(t_1,t_2)||f(\tau_1,\tau_2)|d\tau_1 d\tau_2 \leq \frac{A}{h};$$

$$\left|\int\int\limits_{\Delta_3}\psi(\tau_1,\tau_2)f(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2\right| \leq A\left(\frac{1}{h_1^2}+\frac{1}{h_2^2}+\frac{h^2}{h_1^2h_2^2}\right);$$

$$\left\|\int\int\limits_{\Delta_4}\psi(\tau_1,\tau_2)f(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2\right\| \leq A\left(\frac{\ln h_1}{h_1^2}+\frac{\ln h_2}{h_1^2}+\frac{h^2}{h_1^2h_2^2}\right).$$

Собирая полученные оценки при $h << \min(h_1,h_2)$, имеем:

$$R_{111}\leq Ah|\ln h|.$$

Выражение R_{112} состоит из четырех слагаемых. Оценим одно из них (остальные оцениваются аналогично):

$$\Big|\int\limits_{-1}^{1}\varphi'_{\tau_1}(\tau_1,-1)\Big\{\frac{1}{(-1-t_2)(\tau_1-t_1)}-\frac{1}{4}\Big[\frac{1}{(-1-t_2+ih)(\tau_1-t_1+ih)}+$$

$$+\frac{1}{(-1-t_2-ih)(\tau_1-t_1+ih)}+\frac{1}{(-1-t_2+ih)(\tau_1-t_1-ih)}+$$

$$+\frac{1}{(-1-t_2-ih)(\tau_1-t_1-ih)}\Big]\Big\}\,d\tau_1\Big| \leq$$

$$\leq Ah^2\Bigg|\frac{1}{|-1-t_2|[(-1-t_2)^2+h^2]}\int\limits_{-1}^{1}\frac{|\tau_1-t_1|}{(\tau_1-t_1)^2+h^2}\,d\tau_1+$$

$$+\frac{1}{|-1-t_2|}\int\limits_{-1}^{1}\frac{d\tau_1}{(\tau_1-t_1)[(\tau_1-t_1)^2+h^2]}\Bigg| = O(h^2\ln h).$$

Выражение R_{113} состоит из двух слагаемых. Оценим одно из них (второе слагаемое оценивается аналогично):

$$|\varphi(1,1)|\left|\frac{1}{(1-t_1)(1-t_2)}-\frac{1-t_1-t_2+t_1t_2}{[(1-t_1)^2+h^2][(1-t_2)^2+h^2]}\right| \leq O(h^2).$$

Отметим, что все эти оценки получены в предположении, что $-1+$ $+\Delta \le t_1, t_2 \le 1-\Delta$, где Δ – постоянная. Из полученных оценок следует, что $|R_{11}| \le O(h|\ln h|)$.

Оценим выражение R_{21} (выражения R_{2i}, $i = 2, 3, 4$, оцениваются аналогично):

$$\left|\frac{1}{4}\left[\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{\varphi(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1\,d\tau_2}{(\tau_1-t_1+ih)^2(\tau_2-t_2+ih)^2}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\sum_{k_1=0}^{N_1-1}\sum_{k_2=0}^{N_2-1}\varphi(t'_{k_1},t'_{k_2})\int_{t_{k_1}}^{t_{k_1+1}}\int_{t_{k_2}}^{t_{k_2+1}}\frac{d\tau_1\,d\tau_2}{(\tau_1-t_1+ih)^2(\tau_2-t_2+ih)^2}\right]\right| \le$$

$$\le \frac{1}{4}\sum_{k_1=0}^{N_1-1}\sum_{k_2=0}^{N_2-1}|\int_{t_{k_1}}^{t_{k_1+1}}\int_{t_{k_2}}^{t_{k_2+1}}\frac{|\varphi(\tau_1,\tau_2)-\varphi(t'_{k_1},t'_{k_2})|\,d\tau_1\,d\tau_2}{|\tau_1-t_1+ih|^2||\tau_2-t_2+ih|^2} \le$$

$$\le \frac{A}{4N}\sum_{k_1=0}^{N_1-1}\int_{t_{k_1}}^{t_{k_1+1}}\frac{d\tau_1}{(\tau_1-t_1)^2+h^2}\sum_{k_2=0}^{N_2-1}\int_{t_{k_2}}^{t_{k_2+1}}\frac{d\tau_2}{(\tau_2-t_2)^2+h^2} = O\left(\frac{1}{Nh^2}\right).$$

Оценим выражение R_{31} (R_{3i}, $i = 2, 3, 4$, оцениваются аналогично):

$$\sum_{k_1=0}^{N_1-1}\sum_{k_2=0}^{N_2-1}|\varphi(t'_{k_1},t'_{k_2})-\tilde{\varphi}(t'_{k_1},t'_{k_2})|\times$$

$$\times|\int_{t_{k_1}}^{t_{k_1+1}}\int_{t_{k_2}}^{t_{k_2+1}}\frac{d\tau_1\,d\tau_2}{|(\tau_1-t_1+ih)^2(\tau_2-t_2+ih)^2|} \le O\left(\frac{\varepsilon}{h^2}\right).$$

Собирая вместе оценки выражений R_{ij}, $i = 1, 2, 3$, $j = 1, 2, 3, 4$, убеждаемся в справедливости теоремы.

4. Кубатурные формулы вычисления гиперсингулярных интегралов на топологическом произведении двух бесконечных контуров

Рассмотрим интеграл Адамара

$$A\varphi = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1\,d\tau_2}{(\tau_1-t_1)^{p_1}(\tau_2-t_2)^{p_2}}. \tag{4.1}$$

Функция $\varphi(\tau_1, \tau_2)$ имеет производные до r_1-го порядка по переменной τ_1 и r_2-го порядка по переменной τ_2: $\varphi(\tau_1, \tau_2) \in W^{r_1 r_2}(1)$.

Предположим, что эта функция представима в виде $\varphi(\tau_1, \tau_2) = \rho_i(\tau_1, \tau_2)\psi(\tau_1, \tau_2)$, где ρ_i – весовые функции. В качестве весовых используются следующие функции:

$$\rho_1(\tau_1, \tau_2) = a^{-|\tau_1|-|\tau_2|} \text{ при } a > 1; \quad \rho_2(\tau_1, \tau_2) = e^{-\tau_1^2-\tau_2^2}.$$

Через $W^{r_1,r_2}(1, K)$ обозначим класс функций $\varphi(\tau_1, \tau_2)$, определенных в области $(-\infty; \infty)^2$, имеющих непрерывные производные до $(r_1 - 1)$-го порядка по переменной τ_1 и (r_2-1)-го порядка по переменной τ_2, кусочно-непрерывные производные порядка r_1 по переменной τ_1 и порядка r_2 по переменной τ_2 и удовлетворяющих условиям:

$$\max |\varphi^{(r_1,r_2)}(\tau_1, \tau_2)| \le 1;$$

$$\max(|\varphi(\tau_1, \tau_2)|, |\varphi'_{\tau_1}(\tau_1, \tau_2)|, |\varphi'_{\tau_2}(\tau_1, \tau_2)|, \ldots, |\varphi^{(r_1-1,r_2-1)}_{\tau_1,\tau_2}(\tau_1, \tau_2)|) \le K.$$

Введем обозначения:N_k^1, N_k^2 – целые числа;
$\tau^1_{k,\ell} = k_1 + \ell_1/N^1_{k_1};\ k = -A_1, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, A_1;\ \ell_1 = 0, 1, \ldots, N^1_{k_1};$
$\tau^2_{k,\ell} = k_2 + \ell_2/N^2_{k_2};\ k = -A_2, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, A_2;\ \ell_2 = 0, 1, \ldots, N^2_{k_2}$; значения A_i в зависимости от весовой функции $\rho(\tau_1, \tau_2)$ равны $[r_i \log_a N_i]$ при $\rho(\tau_1, \tau_2) = a^{-|\tau_1|-|\tau_2|}$ или $[\ln N_i]$ при $\rho(\tau_1, \tau_2) = e^{-\tau_1^2-\tau_2^2}$.

Значения N_k^i также зависят от весовой функции: если весовая функция $\rho(\tau_1, \tau_2) = a^{-|\tau_1|-|\tau_2|}$, то $N_k^i = N/a^{kr_1}$; если $\rho(\tau_1, \tau_2) = e^{-\tau_1^2-\tau_2^2}$, то $N_k^i = N/\exp(k^2/r_i)$, $i = 1, 2$.

Теорема 4.1. Пусть $\varphi(\tau_1, \tau_2) \in W^{r_1r_2}(1, K)$ и $|\varphi(\tau_1, \tau_2) - \tilde{\varphi}(\tau_1, \tau_2)| \le \varepsilon$. Тогда для интеграла Адамара (4.1) кубатурная формула

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\tau_1, \tau_2)\, d\tau_1\, d\tau_2}{(\tau_1 - t_1)^{p_1}(\tau_2 - t_2)^{p_2}} =$$

$$= \frac{1}{4}\sum_{k_1=0}^{N_1-1}\sum_{k_2=0}^{N_2-1} \tilde{\varphi}(t'_{k_1}, t'_{k_2}) \int\limits_{t_{k_1}}^{t_{k_1+1}}\int\limits_{t_{k_2}}^{t_{k_2+1}} \Big[\frac{1}{(\tau_1 - t_1 + ih)^{p_1}(\tau_2 - t_2 + ih)^{p_2}} +$$
$$+ \frac{1}{(\tau_1 - t_1 - ih)^{p_1}(\tau_2 - t_2 + ih)^{p_2}} + \frac{1}{(\tau_1 - t_1 + ih)^{p_1}(\tau_2 - t_2 - ih)^{p_2}} +$$
$$+ \frac{1}{(\tau_1 - t_1 - ih)^{p_1}(\tau_2 - t_2 - ih)^{p_2}}\Big] d\tau_1\, d\tau_2 + R_{N_1N_2}(\varphi). \qquad (4.2)$$

При $p_1 = p_2 = 2$ кубатурная формула (4.2) имеет погрешность

$$|R_{N_1N_2}(\varphi)| \le A(h_1^{1/2}h_2^{1/2}|\ln h_1||\ln h_2| + \varepsilon/(h_1h_2) + 1/(Nh_1h_2)).$$

Доказательство. Рассмотрим интеграл Адамара (4.1) в предположении, что

$$\lim_{\tau_1\to\pm\infty,\tau_2\to\pm\infty}\varphi^{(i,j)}_{\tau_1\tau_2}(\tau_1,\tau_2)=0,\quad 0\le i,j\le p-1.$$

Тогда

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1\,d\tau_2}{(\tau_1-t_1)^{p_1}(\tau_2-t_2)^{p_2}}=$$

$$=\frac{1}{(p_1-1)!(p_2-1)!}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi^{(p_1-1,p_2-1)}_{\tau_1\tau_2}(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1\,d\tau_2}{(\tau_1-t_1)(\tau_2-t_2)}. \tag{4.3}$$

Интегрируя по частям, получаем:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1\,d\tau_2}{[\tau_1-(t_1-ih_1)]^{p_1}[\tau_2-(t_2-ih_2)]^{p_2}}=$$

$$=\frac{1}{(p_1-1)!(p_2-1)!}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi^{(p_1-1,p_2-1)}_{\tau_1\tau_2}(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1\,d\tau_2}{[\tau_1-(t_1-ih_1)][\tau_2-(t_2-ih_2)]};$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1\,d\tau_2}{[\tau_1-(t_1-ih_1)]^{p_1}[\tau_2-(t_2+ih_2)]^{p_2}}=$$

$$=\frac{1}{(p_1-1)!(p_2-1)!}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi^{(p_1-1,p_2-1)}_{\tau_1\tau_2}(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1\,d\tau_2}{[\tau_1-(t_1-ih_1)][\tau_2-(t_2+ih_2)]};$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1\,d\tau_2}{[\tau_1-(t_1+ih_1)]^{p_1}[\tau_2-(t_2-ih_2)]^{p_2}}=$$

$$=\frac{1}{(p_1-1)!(p_2-1)!}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi^{(p_1-1,p_2-1)}_{\tau_1\tau_2}(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1\,d\tau_2}{[\tau_1-(t_1+ih_1)][\tau_2-(t_2-ih_2)]};$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1\,d\tau_2}{[\tau_1-(t_1+ih_1)]^{p_1}[\tau_2-(t_2+ih_2)]^{p_2}}=$$

$$=\frac{1}{(p_1-1)!(p_2-1)!}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi^{(p_1-1,p_2-1)}_{\tau_1\tau_2}(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1\,d\tau_2}{[\tau_1-(t_1+ih_1)][\tau_2-(t_2+ih_2)]}. \tag{4.4}$$

Из формул (4.3) и (4.4) следует

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1\,d\tau_2}{(\tau_1-t_1)^{p_1}(\tau_2-t_2)^{p_2}}=$$

$$= \lim_{\eta \to 0} \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Big[\frac{\varphi(\tau_1, \tau_2)}{[\tau_1 - (t_1 - i\eta)]^{p_1} [\tau_2 - (t_2 - i\eta)]^{p_2}} +$$

$$+ \frac{\varphi(\tau_1, \tau_2)}{[\tau_1 - (t_1 - i\eta)]^{p_1} [\tau_2 - (t_2 + i\eta)]^{p_2}} + \frac{\varphi(\tau_1, \tau_2)}{[\tau_1 - (t_1 + i\eta)]^{p_1} [\tau_2 - (t_2 - i\eta)]^{p_2}} +$$

$$+ \frac{\varphi(\tau_1, \tau_2)}{[\tau_1 - (t_1 + i\eta)]^{p_1} [\tau_2 - (t_2 + i\eta)]^{p_2}} \Big] \, d\tau_1 \, d\tau_2.$$

Рассмотрим отдельно интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi_{\tau_1 \tau_2}^{(p_1 - 1, p_2 - 1)}(\tau_1, \tau_2) \, d\tau_1 \, d\tau_2}{[\tau_1 - (t_1 - ih_1)][\tau_2 - (t_2 - ih_2)]} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{[\tau_1 - (t_1 - ih_1)][\tau_2 - (t_2 - ih_2)]} [\varphi_{\tau_1 \tau_2}^{(p_1 - 1, p_2 - 1)}(\tau_1, \tau_2) -$$

$$- \varphi_{t_1 \tau_2}^{(p_1 - 1, p_2 - 1)}(t_1, \tau_2) - \varphi_{\tau_1 t_2}^{(p_1 - 1, p_2 - 1)}(\tau_1, t_2) + \varphi_{t_1 t_2}^{(p_1 - 1, p_2 - 1)}(t_1, t_2)] \, d\tau_1 \, d\tau_2 +$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi_{\tau_1 \tau_2}^{(p_1 - 1, p_2 - 1)}(t_1, \tau_2) - \varphi_{\tau_1 \tau_2}^{(p_1 - 1, p_2 - 1)}(t_1, t_2)}{[\tau_1 - (t_1 - ih_1)][\tau_2 - (t_2 - ih_2)]} \, d\tau_1 \, d\tau_2 +$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi_{\tau_1 \tau_2}^{(p_1 - 1, p_2 - 1)}(\tau_1, t_2) - \varphi_{\tau_1 \tau_2}^{(p_1 - 1, p_2 - 1)}(t_1, t_2)}{[\tau_1 - (t_1 - ih_1)][\tau_2 - (t_2 - ih_2)]} \, d\tau_1 \, d\tau_2 +$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi_{\tau_1 \tau_2}^{(p_1 - 1, p_2 - 1)}(t_1, t_2)}{[\tau_1 - (t_1 - ih_1)][\tau_2 - (t_2 - ih_2)]} \, d\tau_1 \, d\tau_2 = I_1 + I_2 + I_3 + I_4.$$

Второй, третий и четвертый интегралы справа вычисляются по формулам Коши:

$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi_{\tau_1 \tau_2}^{(p_1 - 1, p_2 - 1)}(t_1, \tau_2) - \varphi_{\tau_1 \tau_2}^{(p_1 - 1, p_2 - 1)}(t_1, t_2)}{[\tau_1 - (t_1 - ih_1)][\tau_2 - (t_2 - ih_2)]} \, d\tau_1 \, d\tau_2 =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi_{\tau_1 \tau_2}^{(p_1 - 1, p_2 - 1)}(t_1, \tau_2) - \varphi_{\tau_1 \tau_2}^{(p_1 - 1, p_2 - 1)}(t_1, t_2)}{\tau_2 - (t_2 - ih_2)} \, d\tau_2 \times$$

$$\times \begin{cases} \pi i, & \text{если } \ t_1 - ih_1 \text{ лежит в верхней полуплоскости}, \\ -\pi i, & \text{если } \ t_1 - ih_1 \text{ лежит в нижней полуплоскости}; \end{cases}$$

$$I_3 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi_{\tau_1 \tau_2}^{(p_1 - 1, p_2 - 1)}(\tau_1, t_2) - \varphi_{\tau_1 \tau_2}^{(p_1 - 1, p_2 - 1)}(t_1, t_2)}{[\tau_1 - (t_1 - ih_1)][\tau_2 - (t_2 - ih_2)]} \, d\tau_1 \, d\tau_2 =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi_{\tau_1\tau_2}^{(p_1-1,p_2-1)}(\tau_1,t_2) - \varphi_{\tau_1\tau_2}^{(p_1-1,p_2-1)}(t_1,t_2)}{\tau_1 - (t_1 - ih_1)}\, d\tau_1 \times$$

$$\times \begin{cases} \pi i, & \text{если } t_2 - ih_2 \text{ лежит в верхней полуплоскости,} \\ -\pi i, & \text{если } t_2 - ih_2 \text{ лежит в нижней полуплоскости;} \end{cases}$$

$$I_4 = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi_{\tau_1\tau_2}^{(p_1-1,p_2-1)}(t_1,t_2)}{[\tau_1 - (t_1 - ih_1)][\tau_2 - (t_2 - ih_2)]}\, d\tau_1\, d\tau_2 =$$

$$= \varphi_{\tau_1\tau_2}^{(p_1-1,p_2-1)}(t_1,t_2) \times$$

$$\times \begin{cases} -\pi^2, \text{ если обе точки } (t_1 - ih_1) \text{ и } (t_2 - ih_2) \text{ лежат или в верхних,} \\ \quad \text{или в нижних полуплоскостях соответствующих плоскостей,} \\ \pi^2, \text{ если одна из точек } (t_1 - ih_1) \text{ или } (t_2 - ih_2) \text{ лежит в верхней} \\ \quad \text{полуплоскости, а вторая – в нижней полуплоскости} \\ \text{соответствующих плоскостей.} \end{cases}$$

Оценка погрешности кубатурной формулы (4.2) имеет вид

$$|R_{N_1N_2}(\varphi)| \leq \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4} r_{ij},$$

где слагаемые r_{ij} имеют тот же вид, что и в предыдущем разделе с заменой интегрирования по конечным областям на интегрирование по бесконечным областям. Оценка погрешности $|R_{N_1N_2}(\varphi)|$ складывается из суммы трех групп слагаемых. Каждая группа состоит из четырех слагаемых. Повторяя рассуждения, приведенные в предыдущем разделе, получаем:

$$|R_{N_1N_2}(\varphi)| = O(h_1^{1/2}h_2^{1/2}|\ln h_1||\ln h_2| + \varepsilon/h_1h_2 + 1/Nh_1h_2).$$

Теорема доказана.

Глава 5

ОПТИМАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ МНОГОМЕРНЫХ ГИПЕРСИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

1. Оптимальные методы вычисления гиперсингулярных интегралов с фиксированной сингулярностью

Рассмотрим гиперсингулярный интеграл

$$F\varphi = \int\limits_{-1}^{1} \cdots \int\limits_{-1}^{1} \frac{\varphi(\tau_1, \ldots, \tau_l)}{(\tau_1^2 + \cdots + \tau_l^2)^{p/2}} d\tau_1 d\tau_2 \cdots d\tau_l, \quad p > l, \tag{1.1}$$

который будем вычислять по кубатурным формулам вида

$$F\varphi = \sum_{k_1=1}^{N} \cdots \sum_{k_l=1}^{N} \sum_{j_1=0}^{\rho} \cdots \sum_{j_l=0}^{\rho} p_{k_1 \cdots k_l j_1 \cdots j_l} \varphi^{(j_1, \ldots, j_l)}(x_{k_1} \cdots x_{k_l}) +$$

$$+ R_N(x_{k_1}, \cdots, x_{k_l}; p_{k_1 \cdots k_l j_1 \cdots j_l}; \varphi), \tag{1.2}$$

где $p_{k_1 \cdots k_l j_1 \cdots j_l}-$ коэффициенты, а $(x_{k_1}, \ldots, x_{k_l})$ $(-1 \leq x_{k_i} \leq 1,\ k_i = 0, 1, \ldots, N,\ i = 1, 2, \ldots, l)-$ узлы кубатурной формулы.

Теорема 1.1. Пусть $\Psi = \bar{W}^{r, \ldots, r}(M)$. Для всевозможных кубатурных формул вида (1.2) справедлива оценка $\zeta_N[\Psi] \geq A n^{-r/l}$, где $n-$ число узлов кубатурной формулы.

Доказательство. Обозначим через Δ_k множество точек t, $(t = (t_1, \ldots, t_l))$, удовлетворяющих неравенству

$$\left(\frac{k}{M}\right)^v \leq d(t, 0) \leq \left(\frac{k+1}{M}\right)^v, \quad k = 0, 1, \ldots, M-1,$$

где $v = (r+l)/(r+l-p)$, а целое число M будет определено ниже.

Здесь $d(t, 0)-$ расстояние от точки t до начала координат, определенное формулой $d(t, 0) = \max\limits_{1 \leq i \leq l} |t_i|$.

Пусть $h_k = \left(\frac{k+1}{M}\right)^v - \left(\frac{k}{M}\right)^v$, $k = 0, 1, \ldots, M-1$.

В каждой области Δ_k, $k = 1, 2, \ldots, M-1$, разместим кубы с гранями, параллельными координатным плоскостям, и с ребрами, равными h_k. То обстоятельство, что наряду с кубами в каждой области Δ_k может оказаться несколько параллелепипедов, у которых длины ребер колеблются в пределах от h_k до $2h_k$ не влияет на общность рассуждений. Кубы, вписанные в область Δ_k, обозначим через $\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l}$, $k = 1, 2, \ldots, M-1$. Очевидно, в области Δ_0 имеется только один куб, за которым оставим обозначение Δ_0.

Общее число m кубов Δ_0, $\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l}$, $k = 1, 2, \ldots, M-1$, осуществляющих покрытие области $\Omega = [-1, 1]^l$, оценивается выражением

$$m \asymp M^l. \tag{1.3}$$

Выберем значение M, таким, чтобы $m \geq 2N^l$. В этом случае область Ω покрывается более чем $2N^l$ кубами. Так как кубатурная формула (1.2) имеет N^l узлов, то, по крайней мере, в N^l кубах отсутствуют узлы кубатурной формулы (1.2). Назовем эти кубы отмеченными.

Введем функцию $\varphi^*(\tau_1, \ldots, \tau_l)$, равную нулю во всех неотмеченных кубах и в кубе Δ_0, а в каждом отмеченном кубе $\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l} = [b^k_{i_1}, b^k_{i_1+1}; \cdots; b^k_{i_l}, b^k_{i_l+1}]$, $k \neq 0$, равную функции

$$\varphi^*(\tau_1, \ldots, \tau_l; \Delta^k_{i_1,\ldots,i_l}) = A\frac{((\tau_1 - b^k_{i_1})(b^k_{i_1+1} - \tau_1)\cdots(\tau_l - b^k_{i_l})(b^k_{i_l+1} - \tau_l))^r}{h_k^{r(2l-1)}},$$

где константа A выбирается из условия $\varphi^* \in \Psi$.

Оценим снизу интеграл

$$\int\limits_{\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l}} \frac{\varphi(\tau_1, \ldots, \tau_l; \Delta^k_{i_1,\ldots,i_l})}{(\tau_1^2 + \cdots + \tau_l^2)^{p/2}} d\tau_1 \cdots \tau_l \geq$$

$$\geq A h_k^{r+l}\left(\frac{M}{k+1}\right)^{vp} = A\left(\left(\frac{k+1}{M}\right)^v - \left(\frac{k}{M}\right)^v\right)^{r+l}\left(\frac{M}{k+1}\right)^{vp} =$$
$$= A\frac{((k+\Theta)^{v-1})^{r+l}}{(k+1)^{vp}}\frac{1}{M^{v(r+l-p)}} = \frac{A}{M^{r+l}}, \quad 0 < \Theta < 1. \tag{1.4}$$

Так как число отмеченных кубов не меньше чем $m/2$, то из (1.3) и (1.4) следует, что

$$\int\int\limits_{\Omega} \frac{\varphi^*(\tau_1, \ldots, \tau_l)}{(\tau_1^2 + \cdots + \tau_l^2)^{p/2}} d\tau_1 \cdots \tau_l \geq A\frac{1}{M^r} = A\frac{1}{N^r} = A\frac{1}{n^{r/l}},$$

где $n-$ число узлов кубатурной формулы (1.2).

Теорема доказана.

Теорема 1.2. Пусть $\Psi = C_l^r(M)$. Для всевозможных кубатурных формул вида (1.2) справедливо неравенство $\zeta_N[\Psi] \geq An^{-r/l}$.

Доказательство. Воспользуемся построениями, проведенными при доказательстве предыдущей теоремы, и покроем область $\Omega = [-1,1]^l$ кубами Δ_0, $\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l}$, $k = 0,1,\ldots,M-1$. Введем функцию $\varphi^*(\tau_1,\ldots,\tau_l)$, равную нулю в кубе Δ_0 и в неотмеченных кубах. В каждом из отмеченных кубов $\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l} = [b^k_{i_1}b^k_{i_1+1};\cdots;b^k_{i_l},b^k_{i_l+1}]$ функция $\varphi^*(\tau_1,\ldots,\tau_l)$ равна функции $\varphi(\tau_1,\ldots,\tau_l;\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l})$, которая определяется формулой

$$\varphi(\tau_1,\ldots,\tau_l;\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l}) =$$

$$= A_1((\tau_1 - b^k_{i_1})(b^k_{i_1+1} - \tau_1)\cdots(\tau_l - b^k_{i_l})(b^k_{i_l+1} - \tau_l))^r \frac{1}{h_k^{(2l-1)r}}.$$

Константа A_1 подбирается из условия $\varphi^* \in \Psi$. Нетрудно видеть, что такая константа всегда существует и не зависит от расположения куба $\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l}$.

Подставив функцию $\varphi^*(\tau_1,\ldots,\tau_l)$ в интеграл $F\varphi$ и проделав вычисления, аналогичные проведенным при доказательстве предыдущей теоремы, завершаем доказательство теоремы.

Замечание. Аналогичные результаты справедливы и для кубатурных формул вида

$$F\varphi = \sum_{k=1}^N p_k\varphi(M_k) + R_N(p_k, M_k, \varphi), \tag{1.5}$$

где p_k- коэффициенты, а M_k, $M_k \in \Omega-$ узлы кубатурной формулы.

Построим оптимальные по порядку кубатурные формулы для вычисления интеграла $F\varphi$.

Пусть $\Psi = \bar{W}^{r,\ldots,r}(1)$. Покроем область Ω кубами $\Delta_0, \Delta^k_{i_1,\ldots,i_l}$, $k = 1,2,\ldots,M-1$, введенными при доказательстве теоремы 1.1. В каждом кубе $\Delta_0, \Delta^k_{i_1,\ldots,i_l}$ функцию $\varphi(\tau_1,\ldots,\tau_l)$ будем приближать интерполяционным полиномом $L_{r,\ldots,r}(\varphi,\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l})$, введенным в разделе 3 предыдущей главы. Сплайн, составленный из интерполяционных полиномов $L_{r,\ldots,r}(\varphi,\Delta_0)$, $L_{r,\ldots,r}(\varphi,\ \Delta^k_{i_1,\ldots,i_l})$, $k = 1,2,\ldots,M-1$, обозначим через $\varphi_r(\tau_1,\ldots,\tau_l)$.

Интеграл $F\varphi$ будем вычислять по кубатурной формуле

$$F\varphi = \int\int\limits_{\Delta_0} \frac{\varphi_r(\tau_1,\ldots,\tau_l)}{(\tau_1^2+\cdots+\tau_l^2)^{p/2}} d\tau_1\cdots d\tau_l +$$

$$+\sum_{k=1}^{M-1}\sum_{i_1,\dots,i_l}\int\limits_{\Delta^k_{i_1,\dots,i_l}}\!\!\int \frac{\varphi_r(\tau_1,\dots,\tau_l)}{(\tau_1^2+\dots+\tau_l^2)^{p/2}}d\tau_1\cdots d\tau_l+R_N(\varphi). \quad (1.6)$$

Теорема 1.3. Пусть $\Psi=\bar W^{r,\dots,r}(1)$. Среди всевозможных кубатурных формул вида (1.2) формула (1.6) является оптимальной по порядку. Ее погрешность $R_N[\Psi]\asymp n^{-r/l}$, где $n-$ число узлов кубатурной формулы (1.6).

Доказательство. Оценим погрешность кубатурной формулы (1.6). Очевидно,

$$|R_N(\varphi)|\le\left|\int\!\!\int\limits_{\Delta_0}\frac{\psi_r(\tau_1,\dots,\tau_l)}{(\tau_1^2+\dots+\tau_l^2)^{p/2}}d\tau_1\cdots d\tau_l\right|+$$

$$+\sum_{k=1}^{M-1}\sum_{i_1,\dots,i_l}\left|\int\limits_{\Delta^k_{i_1,\dots,i_l}}\!\!\int\frac{\psi_r(\tau_1,\dots,\tau_l)}{(\tau_1^2+\dots+\tau_l^2)^{p/2}}d\tau_1\cdots d\tau_l\right|=r_1+r_2, \quad (1.7)$$

где $\psi_r(\tau_1,\dots,\tau_l)=\varphi(\tau_1,\dots,\tau_l)-\varphi_r(\tau_1,\dots,\tau_l)$.

Для оценки суммы r_2 предварительно оценим интеграл

$$\left|\int\limits_{\Delta^k_{i_1,\dots,i_l}}\!\!\int\frac{\psi_r(\tau_1,\dots,\tau_l)d\tau_1\cdots d\tau_l}{(\tau_1^2+\dots+\tau_l^2)^{p/2}}\right|\le$$

$$\le Ah_k^l\left(\frac{M}{k}\right)^{vp}\max_{\tau\in\Delta^k_{i_1,\dots,i_l}}|\psi_r(\tau_1,\dots,\tau_l)|\le$$

$$\le Ah_k^{l+r}\left(\frac{M}{k}\right)^{vp}\le\frac{A}{M^{r+l}}.$$

Так как в сумму r_2 входит не больше m слагаемых, приходим к неравенству

$$r_2\le\frac{A}{M^r}. \quad (1.8)$$

Осталось оценить r_1. Для этого воспользуемся определением многомерного гиперсингулярного интеграла. Предварительно представим интеграл r_1 в виде суммы

$$r_1\le\left|\int\limits_{\Delta_0\setminus R(0,h_0)}\!\!\int\frac{\psi_r(\tau_1,\dots,\tau_l)d\tau_1\cdots d\tau_l}{(\tau_1^2+\dots+\tau_l^2)^{p/2}}\right|+$$

$$+\left|\int\limits_{R(0,h_0)}\int \frac{\psi_r(\tau_1,\ldots,\tau_l)d\tau_1\cdots d\tau_l}{(\tau_1^2+\cdots+\tau_l^2)^{p/2}}\right| = r_{11}+r_{12},$$

где $R(0,h_0)-$ шар радиуса h_0 с центром в начале координат.

Нетрудно видеть, что

$$r_{11} \le Ah_0^{l-p}\max_{\tau\in\Delta_0}|\psi_r(\tau_1,\ldots,\tau_l)| \le Ah_0^{r+l-p} = AM^{-(r+l)}. \qquad (1.9)$$

Для оценки r_{12} воспользуемся определением многомерного гиперсингулярного интеграла и перейдем к сферической системе координат

$$\tau_1 = \rho\cos\varphi_1,$$

$$\tau_2 = \rho\sin\varphi_1\cos\varphi_2,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\tau_{l-2} = \rho\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cdots\sin\varphi_{l-3}\cos\varphi_{l-2},$$

$$\tau_{l-1} = \rho\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cdots\sin\varphi_{l-2}\cos\varphi_{l-1},$$

$$\tau_l = \rho\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cdots\sin\varphi_{l-2}\sin\varphi_{l-1},$$

$0\le\varphi_i\le\pi$, $i=1,2,\ldots,l-2$, $0\le\varphi_{l-1}\le 2\pi$. Якобиан преобразования равен [53]

$$J(\rho,\varphi) = \rho^{l-1}\sin^{l-2}\varphi_1\sin^{l-3}\varphi_2\cdots\sin\varphi_{l-2}.$$

В результате имеем

$$r_{12} = \left|\lim_{\eta\to 0}\int\limits_{R(0,h_0)\setminus R(0,\eta)}\int \frac{\psi_r(\tau_1,\ldots,\tau_l)d\tau_1\cdots d\tau_l}{(\tau_1^2+\cdots+\tau_l^2)^{p/2}} + \frac{B(\rho)}{\rho^{p-1}}\right| =$$

$$= \left|\lim_{\eta\to 0}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi}\cdots\int\limits_0^{\pi}\int\limits_\eta^{h_0}\frac{\psi_r(\rho,\varphi_1,\ldots,\varphi_{l-1})J(\rho,\varphi)d\rho d\varphi_1\cdots d\varphi_{l-1}}{\rho^p} + \frac{B(\rho)}{\rho^{p-1}}\right| \le$$

$$\le \left|\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi}\cdots\int\limits_0^{\pi}\sum_{v=0}^{p-l}A_v\frac{\partial^v\psi_r(\rho,\varphi_1,\ldots,\varphi_{l-1})}{\partial\rho^v}\right|_{\rho=h_0}\times$$

$$\times\frac{1}{h_0^{p-l-v}}\sin^{l-2}\varphi_1\cdots\sin\varphi_{l-2}d\varphi_1\cdots d\varphi_{l-1}\Bigg| \le Ah_0^{r-p+l} = AM^{-(r+l)}. \quad (1.10)$$

Из неравенств (1.7) $-$ (1.10) следует, что $|R_N(\varphi)| \le AM^{-r}$.

Так как $\varphi-$ произвольная функция из множества Ψ, то $|R_N(\Psi)| \leq$ $\leq AM^{-r}$. Обозначим через n число узлов кубатурной формулы (1.6). Очевидно, $n = mr^l$.

Из последних двух неравенств и оценки (1.3) следует, что

$$|R_N(\Psi)| \leq \frac{A}{n^{r/l}}. \tag{1.11}$$

Сопоставляя неравенство (1.11) и утверждение теоремы 1.1, завершаем доказательство теоремы.

Заканчивая этот раздел, остановимся на построении оптимальных кубатурных формул еще для одного класса гиперсингулярных интегралов.

Пусть многомерный интеграл вычисляется по кубатурной формуле

$$\int\limits_{-1}^{1} \ldots \int\limits_{-1}^{1} \frac{f(x_1, \ldots, x_l)}{x_1^p} dx_1 \ldots dx_l =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{|v|=0}^{r-1} p_{kv} f^{(v)}(M_k) + R_n(f, p_{kv}, M_k), \tag{1.12}$$

где $M_k \in [-1, 1; \ldots, -1, 1]-$узлы, $p_{kv}-$ коэффициенты, $v = (v_1, \ldots, v_l)$, $|v| = v_1 + \ldots + v_l$, $f^{(v)}(x_1, \ldots, x_l) = \dfrac{\partial^v f}{\partial x_1^{v_1} \ldots \partial x_l^{v_l}}$.

Обозначим через Δ_k множество точек $M = (x_1, \ldots, x_l)$ из Ω, удовлетворяющих неравенству

$$\left(\frac{k}{N}\right)^v \leq \rho(x_1, \Gamma) \leq \left(\frac{k+1}{N}\right)^v,$$

где $v = \dfrac{r+l}{r+l-p}, \Gamma -$ гиперплоскость $x_1 = 0, k = 1, 2, \ldots, N-1$.

Через Δ_0 обозначим множество точек $0 \leq \rho(x_1, \Gamma) \leq \left(\frac{1}{N}\right)^v$.

В каждой области Δ_k разместим кубы $\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l}$, ребра которых равны

$$h_k = \left(\frac{k+1}{N}\right)^v - \left(\frac{k}{N}\right)^v, k = 1, \ldots, N-1,$$

а грани параллельны координатным осям. (Аналогично, через $\Delta^0_{i_1,\ldots,i_l}$ обозначены параллелепипеды, грани которых параллельны координатным плоскостям; длины ребер, параллельных оси OX_1, равны $2h_0$, длины остальных ребер $-h_0$.)

Общее число кубов, которые можно разместить в области Ω, равно

$$2^l \sum_{k=0}^{N-1} \left[\frac{2N^v}{(k+1)^v - k^v}\right]^{l-1} \le n \le 2^l \sum_{k=0}^{N-1} \left(\left[\frac{2N^v}{(k+1)^v - k^v}\right] + 1\right)^{l-1},$$

где $[\alpha]$– целая часть числа α.

Нетрудно видеть, что

$$2^l \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{2N^v}{(k+1)^v - k^v}\right)^{l-1} \le 2^l N^{v(l-1)} + \frac{2^l N^{v(l-1)}}{v^{l-1}} \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{k^{(v-1)(l-1)}} =$$

$$= \begin{cases} O(N^{v(l-1)}), & v > \dfrac{l}{l-1}, \\ O(N^l), & v < \dfrac{l}{l-1}, \\ O(N^l \ln N), & v = \dfrac{l}{l-1}. \end{cases}$$

Аналогичное неравенство имеет место и при оценке снизу.

Отсюда следует, что

$$n \asymp \begin{cases} N^{v(l-1)}, & v > \dfrac{l}{l-1}, \\ N^l, & v < \dfrac{l}{l-1}, \\ N^l \ln N, & v = \dfrac{l}{l-1}. \end{cases} \tag{1.13}$$

Пусть

$$\Delta^k_{i_1,\dots,i_l} = [b^k_{i_1}, b^k_{i_1+1}; \dots; b^k_{i_l}, b^k_{i_l+1}], \Delta^0_{i_1,\dots,i_l} = [b^0_{i_1-1}, b^0_{i_1+1}; \dots; b^0_{i_l-1}, b^0_{i_l+1}].$$

Через $T_r(f, M, \Delta^k_{i_1,\dots,i_l})$ обозначим отрезок ряда Тейлора

$$T_r(f, M, \Delta^k_{i_1,\dots,i_l}) = f(\overline{M}^k_{i_1,\dots,i_l}) + df(\overline{M}^k_{i_1,\dots,i_l}) + \dots + \frac{1}{(r-1)!} d^{r-1} f(\overline{M}^k_{i_1,\dots,i_l}),$$

$$\overline{M}^k_{i_1,\dots,i_l} = [(b^k_{i_1} + b^k_{i_1+1})/2; \dots; (b^k_{i_l} + b^k_{i_l+1})/2].$$

Обозначим

$$\overline{T}_r(f, M, \Delta^0_{i_1,\dots,i_l}) =$$

$$= f(0, x_2, \dots, x_l) + f'_{x_1}(0, x_2, \dots, x_l) x_1 + \dots + \frac{f^{(r-1)}_{x_1}(0, x_2, \dots, x_l)}{(r-1)!} x_1^{r-1}.$$

Для вычисления интеграла введем кубатурную формулу

$$\int\limits_{\Omega}\dots\int \frac{f(x_1,\dots,x_l)}{x_1^p}dx_1\dots dx_l =$$

$$=\sum_{s=0}^{r-1}\sum_{k_2=1}^{r}\dots\sum_{k_l=1}^{r}a_{k_2}\dots a_{k_l}\int\limits_{b_{-1}}^{b_1}\frac{\partial^s f(0,x_{k_2},\dots,x_{k_l})}{\partial x_1^s}\frac{dx_1}{s!x_1^{p-s}}+$$

$$+\sum_{k\geq 1}\sum_{i_1,\dots,i_l}\int\limits_{\Delta^k_{i_1,\dots,i_l}}\dots\int\frac{T_r(f,M,\Delta^k_{i_1,\dots,i_l})}{x_1^p}dx_1\dots dx_l+R_n(f), \qquad (1.14)$$

где $a_{k_i}, x_{k_i}-$ узлы и коэффициенты квадратурной формулы Гаусса.

Теорема 1.4. Среди всевозможных кубатурных формул вида (1.12) оптимальной по порядку на классе $C_l^r(\Omega,1)$ $(r\geq l)$ является формула (1.14). Ее погрешность равна

$$R_n(C_l^r(\Omega,1))=$$

$$=\begin{cases} O(n^{-(r+1-p)/(l-1)}), & v>\dfrac{l}{l-1},\\ O((\ln n)^{(r+l)/l}/n^{r/l}), & v=\dfrac{l}{l-1},\\ O(n^{-r/l}), & v<\dfrac{l}{l-1},\end{cases} \qquad (1.15)$$

где $v=(r+l)/(r+l-p)$.

Доказательство теоремы 1.4. Найдем оценку снизу функционала $\zeta_n[C_l^r(\Omega,1)]$. Кубатурная формула (1.12) содержит n узлов. Обозначим через N число, связанное с n формулой (1.13), где $v=\dfrac{r+l}{r+l-p}$. Пусть $N_1=2N$. Точно так же, как строилось покрытие области Ω кубами $\Delta^k_{i_1,\dots,i_l}$, построим покрытие области Ω кубами $\overline{\Delta}^k_{i_1,\dots,i_l}$ с длиной стороны

$$\overline{h}_k=\left(\frac{k+1}{N_1}\right)^v-\left(\frac{k}{N_1}\right)^v.$$

Построение проводится по аналогии с предыдущим, но с использованием N_1 вместо N. Тогда покрытие области Ω содержит, по крайней мере, $2n$ кубов $\overline{\Delta}^k_{i_1,\dots,i_l}=[\overline{b}^k_{i_1},\overline{b}^k_{i_1+1};\dots;\overline{b}^k_{i_l},\overline{b}^k_{i_l+1}]$. Так как (1.11) содержит n узлов, а число кубов $\overline{\Delta}^k_{i_1,\dots,i_l}$ не менее $2n$, по крайней мере, n кубов не содержат узлов кубатурной формулы (1.12). Обозначим эти кубы через $\overline{\Delta}^{*k}_{i_1,\dots,i_l}$.

Введем функцию $\psi(x)$ $(x=(x_1,\dots,x_l)\in[-1,1]^l)$ по формуле

$$\psi(x_1,\dots,x_l)=$$

$$=\begin{cases} A\dfrac{[(x_1-\overline{b}^k_{i_1})(\overline{b}^k_{i_1+1}-x_1)\dots(x_l-\overline{b}^k_{i_l})(\overline{b}^k_{i_l+1}-x_l)]^r}{\overline{h}_k^{r(2l-1)}}, & x\in\overline{\Delta}^{*k}_{i_1,\dots,i_l},\\ 0, & x\notin\overline{\Delta}^{*k}_{i_1,\dots,i_l}, \end{cases}$$

где константа A подбирается из требования $\psi\in C_l^r(\Omega,1)$.

Рассмотрим интеграл

$$\int\dots\int\limits_{\overline{\Delta}^{*k}_{i_1,\dots,i_l}}\frac{\psi(x_1,\dots,x_l)}{x_1^p}dx_1\dots dx_l\geq$$

$$\geq\frac{1}{(\overline{b}^k_{i_1+1})^p}\int\dots\int\limits_{\overline{\Delta}^{*k}_{i_1,\dots,i_l}}\psi(x_1,\dots,x_l)dx_1\dots dx_l=$$

$$=\frac{1}{(\overline{b}^k_{i_1+1})^p}\int\dots\int\limits_{\overline{\Delta}^{*k}_{i_1,\dots,i_l}}[(x_1-\overline{b}^k_{i_1})(\overline{b}^k_{i_1+1}-x_1)\dots(x_l-\overline{b}^k_{i_l})(\overline{b}^k_{i_l+1}-x_l)]^r\times$$

$$\times\frac{A}{\overline{h}_k^{r(2l-1)}}dx_1\dots dx_l\geq$$

$$\geq\frac{A}{(\overline{b}^k_{i_1+1})^p\overline{h}_k^{r(2l-1)}}(\overline{b}^k_{i_1+1}-\overline{b}^k_{i_1})^r\int\limits_{\overline{b}^k_{i_1}}^{\overline{b}^k_{i_1+1}}(\overline{b}^k_{i_1+1}-x_1)^r dx_1\dots(\overline{b}^k_{i_l+1}-\overline{b}^k_{i_l})^r\times$$

$$\times\int\limits_{\overline{b}^k_{i_l}}^{\overline{b}^k_{i_l+1}}(\overline{b}^k_{i_l+1}-x_l)^r dx_l=\frac{A}{(r+1)^l N^{r+l}}=A_1N^{-(r+l)}.$$

Полученная оценка справедлива для любого куба $\overline{\Delta}^k_{i_1,\dots,i_l}$, в котором отсутствуют узлы кубатурной формулы (1.11). Аналогичные оценки справедливы и для кубов $\Delta^0_{i_1,\dots,i_l}$.

Так как число таких кубов не меньше n,

$$\zeta_n[C_l^r(\Omega,1)] \geq O(nN^{-(r+l)}) = \begin{cases} O(n^{-(r+1-p)/(l-1)}), & v > \dfrac{l}{l-1}, \\ O((\ln n)^{(r+l)/l}/n^{r/l}), & v = \dfrac{l}{l-1}, \\ O(n^{-r/l}), & v < \dfrac{l}{l-1}. \end{cases}$$

Оценка снизу получена.

Приступим к оценке погрешности кубатурной формулы (1.14). В каждом кубе $\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l}$, при $k \geq 1$ справедлива оценка

$$\left| \int\limits_{\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l}} \cdots \int \frac{f(x_1,\ldots,x_l) - T_r(f,M,\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l})}{x_1^p} dx_1 \ldots dx_l \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{(b^k_{i_1})^p} \frac{h_k^r}{r!} \sup_{(\zeta_1,\ldots,\zeta_l)\in\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l}} |d^r f(\zeta_1,\ldots,\zeta_l)| \int\limits_{\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l}} \cdots \int dx_1 \ldots dx_l =$$

$$= O\left(\frac{h_k^{r+l}}{b^{kp}_{i_1}}\right) = O(N^{-(r+l)}). \tag{1.16}$$

Получим оценку для каждого куба $\Delta^0_{i_1,\ldots,i_l}$.

Для определенности возьмем куб $\Delta^0_{i_1,\ldots,i_l} = [b^0_{i_1-1}, b^0_{i_1+1}; \ldots; b^0_{i_l-1}, b^0_{i_l+1}]$.

Тогда

$$\int\limits_{\Delta^0_{i_1,\ldots,i_l}} \cdots \int \frac{f(x_1,\ldots,x_l)}{x_1^p} dx_1 \ldots dx_l -$$

$$-\sum_{s=0}^{r-1} \sum_{k_2=1}^{r} \cdots \sum_{k_l=1}^{r} a_{k_2} \ldots a_{k_l} \int\limits_{b_{-1}}^{b_1} \frac{\partial^s f(0,x_{k_2},\ldots,x_{k_l})}{\partial x_1^s} \frac{dx_1}{s! x_1^{p-s}} =$$

$$= \int\limits_{b_{i_l-1}}^{b_{i_l+1}} \int\limits_{b_{i_{l-1}-1}}^{b_{i_{l-1}+1}} \cdots \int\limits_{b_{i_1-1}}^{b_{i_1+1}} \frac{f(x_1,\ldots,x_l) - \overline{T}_r(f,M,\Delta^0_{i_1,\ldots,i_l})}{x_1^p} dx_1 \ldots dx_l +$$

$$+\sum_{s=0}^{r-1} \left(\int\limits_{\Delta^0_{i_1,\ldots,i_l}} \cdots \int \frac{\partial^s f(0,x_2,\ldots,x_l)}{\partial x_1^s} \frac{dx_1 \ldots dx_l}{s! x_1^{p-s}} - \right.$$

$$
-\sum_{s=0}^{r-1}\sum_{k_2=1}^{r}\dots\sum_{k_l=1}^{r}a_{k_2}\dots a_{k_l}\int\limits_{b_{i_1-1}}^{b_{i_1+1}}\frac{\partial^s f(0,x_{k_2},\dots,x_{k_l})}{\partial x_1^s}\frac{dx_1}{s!x_1^{p-s}}\Bigg)=I_1+I_2.
$$

Используя остаточный член формулы Тейлора в интегральной форме, оценим первое слагаемое:

$$
|I_1|=\left|\int\limits_{b_{i_l-1}}^{b_{i_l+1}}\int\limits_{b_{i_{l-1}-1}}^{b_{i_{l-1}+1}}\dots\int\limits_{b_{i_1-1}}^{b_{i_1+1}}\frac{f(x_1,\dots,x_l)-\overline{T}_r(f,M,\Delta^o_{i_1,\dots,i_l})}{x_1^p}dx_1\dots dx_l\right|=
$$

$$
=\left|\int\limits_{b_{i_l-1}}^{b_{i_l+1}}\int\limits_{b_{i_{l-1}-1}}^{b_{i_{l-1}+1}}\dots\int\limits_{b_{i_1-1}}^{b_{i_1+1}}\frac{1}{x_1^p}\frac{1}{(r-1)!}\int\limits_0^{x_1}\frac{\partial^r f(\tau,x_2,\dots,x_l)}{\partial\tau^r}(x_1-\tau)^{r-1}d\tau dx_1\dots dx_l\right|\le
$$

$$
\le\left|\frac{M}{r!}\int\limits_{b_{i_l-1}}^{b_{i_l+1}}\int\limits_{b_{i_{l-1}-1}}^{b_{i_{l-1}+1}}\dots\int\limits_{b_{i_1-1}}^{b_{i_1+1}}x_1^{r-p}dx_1\dots dx_l\right|=
$$

$$
=\frac{M}{r!(r-p+1)}\left(\frac{1}{N}\right)^{v(r-p+1)}h_0^{l-1}=O(N^{-(r+l)}). \tag{1.17}
$$

Для того чтобы оценить второе слагаемое I_2, введем функцию

$$
g_s(x_2,\dots,x_l)=\int\limits_{-h_1}^{h_1}\frac{\partial^s f(0,x_2,\dots,x_l)}{\partial x_1^s}\frac{dx_1}{x_1^{p-s}}=
$$

$$
=\frac{\partial^s f(0,x_2,\dots,x_l)}{\partial x_1^s}\int\limits_{-h_1}^{h_1}\frac{dx_1}{x_1^{p-s}}dx_1=
$$

$$
=\begin{cases}\dfrac{2}{1-p+s}\dfrac{\partial^s f(0,x_2,\dots,x_l)}{\partial x_1^s}\left(\dfrac{N}{2}\right)^{(r+l)(p-s-1)/(r+l-p)}, & p-s>1,\\ 0, & p-s=1.\end{cases}
$$

Таким образом, функция $g_s(x_2,\dots,x_l)$ имеет частные производные до $(r-s)$-го порядка, ограниченные константой

$$
\|g_s(x_2,\dots,x_l)\|\le\frac{2}{1-p+s}\left(\frac{N}{2}\right)^{(r+l)(p-s-1)/(r+l-p)}. \tag{1.18}
$$

Интегралы

$$
\int\limits_{b_{i_2}}^{b_{i_2+1}}\dots\int\limits_{b_{i_l}}^{b_{i_l+1}}g_s(x_2,\dots,x_l)dx_2\dots dx_l
$$

вычисляются последовательным (по переменным $x_2, \dots, x_l$) применением формулы Гаусса. Нетрудно видеть, что погрешность вычислений при этом оценивается неравенством

$$\left| \int\limits_{b_{i_2}}^{b_{i_2+1}} \dots \int\limits_{b_{i_l}}^{b_{i_l+1}} g_s(x_2, \dots, x_l) dx_2 \dots dx_l - \right.$$

$$\left. - \sum_{s=0}^{r-1} \sum_{k_2=1}^{r} \dots \sum_{k_l=1}^{r} a_{k_2} \dots a_{k_l} g_s(x_{k_2}, \dots, x_{k_l}) \right| =$$

$$= \left| \int\limits_{b_{i_2}}^{b_{i_2+1}} \dots \int\limits_{b_{i_l}}^{b_{i_l+1}} g_s(x_2, \dots, x_l) dx_2 \dots dx_l - \right.$$

$$\left. - \int\limits_{b_{i_2}}^{b_{i_2+1}} \dots \int\limits_{b_{i_l}}^{b_{i_l+1}} L_r \dots L_r g_s(x_2, \dots, x_l) dx_2 \dots dx_l \right| \leq$$

$$\leq A h_0^{r-s+l-1} \| g_s(x_2, \dots, x_l) \| = O(N^{-(r+l)}), \tag{1.19}$$

где L_r- оператор проектирования на полиномы Лежандра. Из оценок (1.16) $-$ (1.19), соотношения (1.13) и из того обстоятельства, что покрытие куба Ω состоит из n параллелепипедов $\Delta^k_{i_1,\dots,i_l}$ $(k = 0, 1, \dots, N-1)$, следует оценка (1.15). Теорема доказана.

Рассмотрим многомерный интеграл

$$\int\limits_{-1}^{1} \dots \int\limits_{-1}^{1} \frac{f(x_1, \dots, x_l)}{|x_1|^{p+\alpha}} dx_1 \dots x_l =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{|v|=0}^{r-1} p_{kv} f^v(M_k) + R_n(f, p_{kv}, M_k). \tag{1.20}$$

Пусть интеграл (1.20) вычисляется по кубатурной формуле

$$\int\limits_{\Omega} \dots \int \frac{f(x_1, \dots, x_l)}{|x_1|^{p+\alpha}} dx_1 \dots dx_l =$$

$$= \sum_{i_1,\dots,i_l} \int\limits_{\Delta^0_{i_1,\dots,i_l}} \dots \int \frac{\overline{T}_r(f, M, \Delta^0_{i_1,\dots,i_l})}{|x_1|^{p+\alpha}} dx_1 \dots dx_l +$$

$$+ \sum_{k \geq 1} \sum_{i_1,\dots,i_l} \int\limits_{\Delta^k_{i_1,\dots,i_l}} \dots \int \frac{T_r(f, M, \Delta^k_{i_1,\dots,i_l})}{|x_1|^{p+\alpha}} dx_1 \dots dx_l + R_n(f). \tag{1.21}$$

Повторяя рассуждения, аналогичные проведенным при доказательстве теоремы 1.4, приходим к следующему утверждению.

Теорема 1.5. Среди всевозможных кубатурных формул вида (1.20) оптимальной по порядку на классе $C_l^r(\Omega, 1)$ является формула (1.21). Ее погрешность равна

$$R_n(C_l^r(\Omega,1)) = \begin{cases} O(n^{-(r+1-p-\alpha)/(l-1)}), & v > \dfrac{l}{l-1}, \\ O((\ln n)^{(r+l)/l}/n^{r/l}), & v = \dfrac{l}{l-1}, \\ O(n^{-r/l}), & v < \dfrac{l}{l-1}, \end{cases} \qquad (1.22)$$

где $v = \dfrac{r+l}{r+l-p-\alpha}$.

Доказательство теоремы 1.5 проводится аналогично доказательству теоремы 1.4.

В случае, если вычисление производных функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_l)$ по переменной x_1 в аналитическом виде вызывает затруднения, то для вычисления гиперсингулярного интеграла

$$\int\limits_{-1}^{1} \cdots \int\limits_{-1}^{1} \frac{f(x_1, \ldots, x_l)}{x_1^p} dx_1 \cdots dx_l$$

может быть построена кубатурная формула, использующая только значения функции $f(x_1, \ldots, x_l)$ на некоторой сетке узлов.

Покроем область Ω кубами $\Delta^0_{i_1,\ldots,i_l}, \Delta^k_{i_1,\ldots,i_l}$, построение которых описано выше. В каждом кубе $\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l}$ функцию $f(x_1, \ldots, x_l)$ будем аппроксимировать интерполяционным полиномом $L_{r,\ldots,r}(f, \Delta^k_{i_1,\ldots,i_l})$, построение которого было описано в разделе 3 предыдущей главы. В параллелепипедах $\Delta^0_{i_1,\ldots,i_l}$ функция $f(x_1, \ldots, x_l)$ аппроксимируется интерполяционными полиномами, у которых число узлов интерполяции по переменной x_1 равно $2r+1$, а число узлов интерполяции по остальным переменным $-$ $r+1$. Обозначим эти полиномы через $L_{2r,r,\ldots,r}(f, \Delta^0_{i_1,i_2,\ldots,i_l})$.

Сплайн, составленный из полиномов $L_{r,\ldots,r}(f, \Delta^k_{i_1,\ldots,i_l})$, $k = 1, 2, \ldots, N-$ -1, $L_{2r,r,\ldots,r}(f, \Delta^0_{i_1,\ldots,i_l})$, обозначим через $f_{r,\ldots,r}(x_1, \ldots, x_l)$.

Построим кубатурную формулу

$$\int\limits_{-1}^{1} \cdots \int\limits_{-1}^{1} \frac{f(x_1, \ldots, x_l)}{x_1^p} dx_1 \cdots dx_l =$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{i_1,\ldots,i_l} \int \cdots \int\limits_{\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l}} \frac{f_{r,\cdots,r}(x_1,\ldots,x_l)}{x_1^p} dx_1 \cdots dx_l + R_N(f). \qquad (1.23)$$

Можно показать, что погрешность кубатурной формулы (1.23) оценивается выражением (1.22). При вычислении интегралов (1.23) можно воспользоваться следующим приемом. Полином $L_{r,\ldots,r}(f, \Delta^k_{i_1,\ldots,i_l})$, $k = 1, 2, \ldots, N-1$, можно представить в виде отрезка ряда Тейлора до r порядка по степеням полинома x_1. Формально это можно записать в виде $T_r^{x_1}(L_{r,\ldots,r}(f, \Delta^k_{i_1,\ldots,i_l}), x_1)$.

Аналогично, полином $L_{2r,r,\ldots,r}(f, \Delta^0_{i_1,\ldots,i_l})$ можно представить в виде отрезка ряда Тейлора до $2r$ порядка по степеням полинома x_1.

Формально это можно записать в виде $T_{2r}^{x_1}(L_{2r,r,\ldots,r}(f, \Delta^0_{i_1,\ldots,i_l}), x_1)$.

Тогда кубатурную формулу (1.23) можно записать в виде эквивалентного выражения

$$\int_{-1}^{1} \cdots \int_{-1}^{1} \frac{f(x_1,\ldots,x_l)}{x_1^p} dx_1 \cdots dx_l =$$

$$= \sum_{i_1,\ldots,i_l} \int \int\limits_{\Delta^0_{i_1,\ldots,i_l}} \frac{T_p^{x_1}(L_{2r,r,\cdots,r}(f, \Delta^0_{i_1,\ldots,i_l}), x_1)}{x_1^p} dx_1 \cdots dx_l +$$

$$+ \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{i_1,\ldots,i_l} \int \int\limits_{\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l}} \frac{T_p^{x_1}(L_{r,\cdots,r}(f, \Delta^k_{i_1,\ldots,i_l}), x_1)}{x_1^p} dx_1 \cdots dx_l +$$

$$+ \sum_{i_1,\ldots,i_l} \int \int\limits_{\Delta^0_{i_1,\ldots,i_l}} P_r\left[\frac{R_{2r,r\cdots,r}}{x_1^p}; \Delta^0_{i_1,\ldots,i_l}\right] dx_1 \cdots dx_l +$$

$$+ \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{i_1,\ldots,i_l} \int \int\limits_{\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l}} P_r\left[\frac{R_{r,\cdots,r}}{x_1^p}; \Delta^k_{i_1,\ldots,i_l}\right] dx_1 \cdots dx_l + R_N(f), \qquad (1.24)$$

где $R_{2r,r\cdots,r} = L_{2r,r,\cdots,r}(f, \Delta^0_{i_1,\ldots,i_l}) - T_p^{x_1}(L_{2r,r,\cdots,r}(f, \Delta^0_{i_1,\ldots,i_l}), x_1)$, $R_{r,\cdots,r} = L_{r,\cdots,r}(f, \Delta^k_{i_1,\ldots,i_l}) - T_p^{x_1}(L_{r,\cdots,r}(f, \Delta^k_{i_1,\ldots,i_l}), x_1)$, $P_r(f, \Delta^k_{i_1,\ldots,i_l})-$ оператор проектирования функции $f(x_1,\ldots,x_l)$ по каждой переменной x_i, $i = 1, 2, \ldots, l$, на множество интерполяционных полиномов по r узлам, являющимися образами узлов полинома Лежандра при отображении сегмента $[-1, 1]$ на ребра областей $\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l}$, $k = 0, 1, \ldots, N-1$.

Замечание. Другими словами, $\int\limits_{\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l}}\int P_r(f;\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l})dx_1\cdots dx_l$ означает кубатурную формулу, которая по каждой переменной является квадратурной формулой Гаусса наивысшей алгебраической точности.

Для вычисления первых двух интегралов в формуле (1.24) можно использовать методы аналитических вычислений на компьютерах. Для этого полином $T_p^{x_1}(L_{r,\cdots,r}(f,\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l},x_1))$ нужно представить в виде полинома по степеням x_1 и вычислить в отдельности в аналитической форме интеграл от каждого слагаемого.

2. Оптимальные методы вычисления многомерных гиперсингулярных интегралов с переменной сингулярностью

В этом разделе исследуются оптимальные по порядку кубатурные формулы вычисления гиперсингулярных интегралов вида

$$H\varphi=\int\limits_{-1}^{1}\cdots\int\limits_{-1}^{1}\frac{\varphi(\tau_1,\ldots,\tau_l)d\tau_1\cdots d\tau_l}{((\tau_1-t_1)^2+\cdots+(\tau_l-t_l)^2)^{p/2}}. \qquad (2.1)$$

Для вычисления интеграла (2.1) будем использовать кубатурные формулы следующих видов:

$$H\varphi=\sum_{k_1=1}^{N_1}\cdots\sum_{k_l=1}^{N_l}\sum_{j_1=0}^{\rho_1}\cdots\sum_{j_l=0}^{\rho_l}p_{k_1\cdots k_l i_1\cdots i_l}(t_1,\ldots,t_l)\varphi^{(i_1,\ldots,i_l)}(x_{k_1},\cdots,x_{k_l})+$$
$$+R_N(x_{k_1},\cdots,x_{k_l};p_{k_1\cdots k_l i_1\cdots i_l};\varphi) \qquad (2.2)$$

и

$$H\varphi=\sum_{k=1}^{N}p_k(t_1,\ldots,t_l)\varphi(M_k)+R_N(M_k,p_k,\varphi). \qquad (2.3)$$

Здесь $p_{k_1\cdots k_l i_1\cdots i_l}(t_1,\ldots,t_l)$, $p_k(t_1,\ldots,t_l)$ − коэффициенты, а $\{x_{k_i}\}$, $(-1\le x_{k_i}\le 1)$ $k_i=1,2,\ldots,N_l$, $i=1,2,\ldots,l$, M_k, $M_k\in\Omega=[-1,1]^l$, $k=1,2,\ldots,N-$ узлы соответствующих кубатурных формул.

Ниже для простоты обозначений в кубатурной формуле (2.2) будем полагать $N_1=N_2=\cdots N_l=N$ и $\rho_1=\rho_2=\cdots=\rho_l=\rho$, $l=2$. Распространение полученных результатов на общий случай не вызывает принципиальных затруднений.

Теорема 2.1. Пусть $\Psi\in\bar W^{r,r}(r)$. Для всевозможных кубатурных формул вида (2.2) справедлива оценка $\zeta_N[\Psi]\ge AN^{-(r+2-p)}=An^{-(r+2-p)/2}$, где $n-$ число узлов кубатурной формулы (2.2).

Доказательство. Пусть $n = N^2-$ число узлов кубатурной формулы (2.2), $m = [(2n)^{1/2}] + 1$. Покроем область $\Omega = [-1,1]^2$ квадратами $\Delta_{kl} = [x_k, x_{k+1}; x_l, x_{l+1}]$, $k, l = 0, 1, \ldots, m-1$, $x_k = -1 + 2k/m$, $k = 0, 1, \ldots, m$. Общее число квадратов Δ_{kl}, $k, l = 0, 1, \ldots, m-1$, равно $m^2 \geq 2n$. Следовательно, по крайней мере, n квадратов не содержат узлов кубатурной формулы (2.2). Назовем эти квадраты отмеченными. Как и при доказательстве теоремы 3.1 из предыдущей главы введем определения отмеченных строк и столбцов и воспользуемся описанными там обозначениями $\theta_1(k,l)$ и $\theta_2(k,l)$. Точно так же, как при доказательстве теоремы 3.1 из предыдущей главы, можно показать, что осуществляют такие числа $\bar{k}_1$ и $\bar{k}_2$ ($\bar{k}_1 \leq 3m/4, \bar{k}_2 \leq 3m/4$), что $\bar{\theta}_i(\bar{k}_1, l) > 1/3$, $i = 1, 2$. Положим $x_i = -1 + 2\bar{k}_i/m$, $i = 1, 2$, и определим функцию $\varphi^*(\tau_1, \tau_2)$ следующим образом. На всех квадратах $\Delta_{ij} = [x_i, x_{i+1}; x_j, x_{j+1}]$, у которых или индекс $i \leq \bar{k}_1 - 1$ или индекс $j \leq \bar{k}_2 - 1$, функция $\varphi^*(\tau_1, \tau_2) = 0$. Она также равна нулю на квадратах, не являющихся пересечением отмеченных строк и столбцов.

На квадратах, у которых индексы i и j больше, чем $\bar{k}_1$ и $\bar{k}_2$, и которые являются пересечениями отмеченных строк и столбцов, функция $\varphi^*(\tau_1, \tau_2)$ определяется по формуле

$$\varphi^*(\tau_1, \tau_2) = A((\tau_1 - x_i)(x_{i+1} - \tau_1)(\tau_2 - x_j)(x_{j+1} - \tau_2))^r \left(\frac{2}{m}\right)^{3r}.$$

Константа A подбирается из условия, чтобы $\varphi^*(\tau_1, \tau_2) \in \Psi$. Нетрудно видеть, что такая константа существует и не зависит от индексов i и j.

Подставляя функцию $\varphi^*(\tau_1, \tau_2)$ в интеграл $H\varphi$, имеем:

$$H\varphi^*(x_{\bar{k}_1}, x_{\bar{k}_2}) = \sum_{k_1=\bar{k}_1+1}^{m-1}{}' \sum_{k_2=\bar{k}_2+1}^{m-1}{}' \int\limits_{\Delta_{k_1k_2}}\int \frac{\varphi^*(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2}{((\tau_1 - x_{\bar{k}_1})^2 + (\tau_2 - x_{\bar{k}_2})^2)^{p/2}} \geq$$

$$\geq \frac{A}{m^{r+2-p}} \sum_{k_1=\bar{k}_1+1}^{m-1}{}' \sum_{k_2=\bar{k}_2+1}^{m-1}{}' \frac{1}{((k_1 - \bar{k}_1)^2 + (k_2 - \bar{k}_2)^2)^{p/2}} \geq$$

$$\geq \frac{A}{m^{r+2-p}} = \frac{A}{n^{(r+2-p)/2}}.$$

Теорема доказана.

Теорема 2.2. Пусть $\Psi = C_2^r(1)$. Для всевозможных кубатурных формул вида (2.2) справедлива оценка $\zeta_N[\Psi] \geq AN^{-(r+2-p)} = An^{-(r+2-p)/2}$, где $n-$ число узлов кубатурной формулы (2.2).

Доказательство. Как и при доказательстве предыдущей теоремы покроем область Ω квадратами Δ_{kl}, $k, l = 0, 1, \dots, m$, и введем отмеченные квадраты, отмеченные строки и отмеченные столбцы.

В отмеченных квадратах $[x_k, x_{k+1}; y_l, y_{l+1}]$, имеющих номера $k \geq k_1+1$, $l \geq k_2 + 1$, введем функцию:

$$\varphi^*(\tau_1, \tau_2) = A\frac{((\tau_1 - x_k)(x_{k+1} - \tau_1)(\tau_2 - x_l)(x_{l+1} - \tau_2))^r}{h^{3r}},$$

где $h = 2/m$.

В остальных квадратах положим $\varphi^*(\tau_1, \tau_2) = 0$.

Константа A выбирается таким образом, чтобы функция $\varphi^*(t_1, t_2) \in \in C_2^r(1)$.

Подставляя функцию $\varphi^*(\tau_1, \tau_2)$ в интеграл $H\varphi$ и проделывая соответствующие вычисления, приходим к оценке: $\zeta_N[\Psi] = An^{-(r+2-p)/2}$.

Теорема доказана.

Теорема 2.3. Пусть $\Psi = \bar{W}^{r,r}(1)$. Для всевозможных кубатурных формул вида (2.3) справедливо неравенство $\zeta_N[\Psi] \geq AN^{-(r+2-p)/2}$.

Доказательство. Пусть $m = [\sqrt{2N}] + 1$. Покроем область $\Omega = = [-1, 1]^2$ квадратами $\Delta_{k,l} = [x_k, x_{k+1}; x_l, x_{l+1}]$, $k, l = 0, 1, \dots, m - 1$, где $x_k = -1 + 2k/m$, $k = 0, 1, \dots, m$. Таким образом, число квадратов, покрывающих область Ω не меньше $2N$. Следовательно, по крайней мере, в N квадратах отсутствуют узлы кубатурной формулы (2.3). Назовем эти квадраты отмеченными. По аналогии с доказательством теоремы 3.3 из предыдущей главы введем определение отмеченных строк и столбцов.

В отмеченных квадратах $\Delta_{k,l}$ с индексами $k \geq \bar{k}_1+1$ и $l \geq \bar{k}_2+1$ введем функцию $\varphi^*(\tau_1, \tau_2)$, определенную выше при доказательстве теоремы 3.3 предыдущей главы.

Оценив снизу интеграл

$$(H\varphi^*)(t_{\bar{k}_1+1}, t_{\bar{k}_2+1}) = \int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1} \frac{\varphi^*(\tau_1, \tau_2)d\tau_1 d\tau_2}{((\tau_1 - t_{\bar{k}_1+1})^2 + (\tau_2 - t_{\bar{k}_2+1})^2)^{p/2}},$$

приходим к неравенству $|R_N(\varphi^*)| \geq AN^{-(r+2-p)} = An^{-(r+2-p)/2}$,
где $n = N^2-$ число узлов кубатурной формулы (2.3).

Так как $\varphi^* \in \Psi$, $R_N[\Psi] \geq \sup\limits_{\varphi\in\Psi} |R_N(\varphi)| \geq |R_N(\varphi^*)| \geq An^{-(r+2-p)/2}$.

Теорема доказана.

Теорема 2.4. Пусть $\Psi = C_2^r(1)$. Для всевозможных кубатурных формул вида (2.3) справедливо неравенство

$$\zeta_N[\Psi] \geq A \frac{1}{n^{(r+2-p)/2}}.$$

Доказательство теоремы является объединением доказательств теорем 2.2 и 2.3.

Построим оптимальные по порядку кубатурные формулы вычисления интегралов вида (2.1) на классах функций $\bar{W}^{r,r}(1)$ и $C_2^r(1)$.

Покроем область $\Omega = [-1,1]^2$ квадратами $\Delta_{kl} = [x_k, x_{k+1}; x_l, x_{l+1}]$, $k, l = 0, 1, \ldots, N-1$, $x_k = -1 + 2k/N$, $k = 0, 1, \ldots, N$. В квадрате Δ_{kl} функцию $\varphi(\tau_1, \tau_2)$ будем аппроксимировать интерполяционным полиномом $L_{rr}(\varphi, \Delta_{kl})$, $k, l = 0, 1, \ldots, N-1$, введенным в предыдущем разделе.

Пусть $(t_1, t_2) \in \Delta_{ij}$, $0 \leq i, j \leq N-1$. Будем считать, что точка (t_1, t_2) не принадлежит границе Γ области Ω.

Замечание. В случае, если точка (t_1, t_2) принадлежит границе Γ, нужно воспользоваться определением 1.16 гиперсингулярного интеграла, приведенным в разделе 1 главы 1.

Пусть $(t_1, t_2) \in \Delta_{ij}$, $i, j = 0, 1, \ldots, N-1$. Интеграл (2.1) будем вычислять по кубатурной формуле

$$H\varphi = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1}{}' \int\limits_{\Delta_{kl}}\!\!\int \frac{L_{rr}(\varphi, \Delta_{kl}) d\tau_1 d\tau_2}{((\tau_1 - t_1)^2 + (\tau_2 - t_2)^2)^{p/2}} +$$

$$+ \int\limits_{\Delta_{ij}^*}\!\!\int \frac{L_{rr}(\varphi, \Delta_{ij}^*) d\tau_1 d\tau_2}{((\tau_1 - t_1)^2 + (\tau_2 - t_2)^2)^{p/2}} + R_N(\varphi), \qquad (2.4)$$

где $\Delta_{ij}^* = [x_{i-1}, x_{i+2}; x_{j-1}, x_{j+2}]$, $\sum\sum'$ означает суммирование по k и l таким, что мера пересечения квадратов Δ_{kl} с квадратом Δ_{ij}^* равна нулю.

Теорема 2.5. Пусть $\Psi = \bar{W}^{r,r}(1)$. Среди всевозможных кубатурных формул вида (2.2) оптимальной по порядку является формула (2.4), имеющая погрешность

$$R_N[\Psi] \asymp N^{-(r+2-p)} \asymp n^{-(r+2-p)/2},$$

где $n-$ число узлов кубатурной формулы.

Доказательство. Оценим погрешность кубатурной формулы (2.4). Очевидно,

$$|R_N(\varphi)| = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1}{}' \left| \int\limits_{\Delta_{kl}}\!\!\int \frac{\psi_{rr}(\varphi, \Delta_{kl}) d\tau_1 d\tau_2}{((\tau_1 - t_1)^2 + (\tau_2 - t_2)^2)^{p/2}} \right| +$$

$$+\left|\int\limits_{\Delta_{ij}^*}\int\frac{\psi_{rr}(\varphi,\Delta_{ij}^*)d\tau_1 d\tau_2}{((\tau_1-t_1)^2+(\tau_2-t_2)^2)^{p/2}}\right|=I_1+I_2, \qquad (2.5)$$

где $\psi_{rr}(\varphi,\Delta_{kl})=\varphi(\tau_1,\tau_2)-L_{rr}(\varphi,\Delta_{kl}), (\tau_1,\tau_2)\in\Delta_{kl}, k,l=0,1,\ldots,N-1.$

Оценим каждое из выражений I_1, I_2 в отдельности.

Нетрудно видеть, что

$$I_1\le\sum_{k=0}^{i-2}\sum_{l=0}^{j-2}\frac{1}{((x_i-x_k)^2+(x_j-x_l)^2)^{p/2}}\int\limits_{\Delta_{kl}}\int|\psi_{rr}(\varphi,\Delta_{kl})|d\tau_1d\tau_2+$$

$$+\sum_{k=0}^{i-2}\sum_{l=j+2}^{N-1}\frac{1}{((x_i-x_k)^2+(x_l-x_{j+1})^2)^{p/2}}\int\limits_{\Delta_{kl}}\int|\psi_{rr}(\varphi,\Delta_{kl})|d\tau_1d\tau_2+$$

$$+\sum_{k=i+2}^{N-1}\sum_{l=0}^{j-2}\frac{1}{((x_k-x_{i+1})^2+(x_j-x_l)^2)^{p/2}}\int\limits_{\Delta_{kl}}\int|\psi_{rr}(\varphi,\Delta_{kl})|d\tau_1d\tau_2+$$

$$+\sum_{k=i+2}^{N-1}\sum_{l=j+2}^{N-1}\frac{1}{((x_k-x_{i+1})^2+(x_l-x_{j+1})^2)^{p/2}}\int\limits_{\Delta_{kl}}\int|\psi_{rr}(\varphi,\Delta_{kl})|d\tau_1d\tau_2\le$$

$$\le\frac{A}{N^{r+2}}\left(\sum_{k=0}^{i-2}\sum_{l=0}^{j-2}\frac{N^p}{(u_1+u_2)^{p/2}}+\sum_{k=0}^{i-2}\sum_{l=j+2}^{N-1}\frac{N^p}{(u_1+u_3)^{p/2}}+\right.$$

$$\left.+\sum_{k=i+2}^{N-1}\sum_{l=0}^{j-2}\frac{N^p}{(u_4+u_2)^{p/2}}+\sum_{k=i+2}^{N-1}\sum_{l=j+2}^{N-1}\frac{N^p}{(u_4+u_2)^{p/2}}\right)\le\frac{A}{N^{r+2-p}}, \qquad (2.6)$$

где $u_1=(i-k-1)^2, u_2=(j-l-1)^2, u_3=(l-j-1)^2, u_4=(k-i-1)^2.$

Интеграл I_2 представим следующим образом:

$$I_2\le\left|\int\limits_{\Delta_{ij}^*\setminus R(t_{12},\delta_0)}\int\frac{\psi_{rr}(\varphi,\Delta_{ij}^*)d\tau_1d\tau_2}{((\tau_1-t_1)^2+(\tau_2-t_2)^2)^{p/2}}\right|+$$

$$+\left|\int\limits_{R(t_{12},\delta_0)}\int\frac{\psi_{rr}(\varphi,\Delta_{ij}^*)d\tau_1d\tau_2}{((\tau_1-t_1)^2+(\tau_2-t_2)^2)^{p/2}}\right|=I_{21}+I_{22}, \qquad (2.7)$$

где $t_{12}=(t_1,t_2)$, $\delta_0=\min(|t_1-x_{i-1}|,|x_{i+2}-t_1|,|t_2-x_{j-1}|,|x_{j+2}-t_2|)$.

Учитывая, что $\delta_0\ge 2/N$, интеграл I_{21} оценивается неравенством

$$I_{21}\le AN^p\int\limits_{\Delta_{ij}^*}\int\left|\psi_{rr}(\varphi,\Delta_{ij}^*)|d\tau_1d\tau_2\right|\le\frac{A}{N^{r+2-p}}. \qquad (2.8)$$

Для оценки интеграла I_{22} воспользуемся определением гиперсингулярных интегралов:

$$I_{22} = \left| \lim_{\eta \to 0} \int \int\limits_{R(t_{12},\delta_0)\setminus R(t_{12},\eta)} \frac{\psi_{rr}(\varphi, \Delta^*_{ij}) d\tau_1 d\tau_2}{((\tau_1 - t_1)^2 + (\tau_2 - t_2)^2)^{p/2}} \right|.$$

Оценка выражения I_{22} дословно повторяет оценку выражения r_{12} (формула (1.10)) из раздела 1 данной главы. Следовательно,

$$I_{22} \leq \frac{A}{N^{r+2-p}}. \tag{2.9}$$

Из оценок (2.4) – (2.9) следует неравенство

$$|R_N(\varphi)| \leq \frac{A}{N^{r+2-p}} = \frac{A}{n^{(r+2-p)/2}}.$$

Из произвольности функции $\varphi \in \Psi$ имеем

$$R_N[\Psi] \leq \frac{A}{n^{(r+2-p)/2}}. \tag{2.10}$$

Сопоставляя неравенство (2.10) с утверждением теоремы 2.1, завершаем доказательство теоремы.

Теорема 2.6. Пусть $\Psi = C_2^r(1)$. Для всевозможных кубатурных формул вида (2.2) оптимальной по порядку является формула (2.4). Ее погрешность равна

$$R_N[\Psi] \asymp \frac{1}{n^{(r+2-p)/2}},$$

где $n-$ число узлов кубатурной формулы.

Доказательство подобно доказательству предыдущей теоремы и поэтому опускается.

Пусть $m = [\sqrt{N}] + 1$. Покроем область $\Omega = [-1, 1]^2$ квадратами $\Delta_{kl} = [x_k, x_{k+1}; x_l, x_{l+1}]$, $k, l = 0, 1, \ldots, m-1$, $x_k = -1+2k/m$, $k = 0, 1, \ldots, m$. Пусть $(t_1, t_2) \in \Delta_{ij}$, $0 \leq i, j \leq m - 1$. Интеграл (2.1) при $l = 2$ будем вычислять по кубатурной формуле

$$H\varphi = \sum_{k=0}^{m-1} {\sum_{l=0}^{m-1}}' \int \int\limits_{\Delta_{kl}} \frac{L_{rr}(\varphi, \Delta_{kl}) d\tau_1 d\tau_2}{((\tau_1 - t_1)^2 + (\tau_2 - t_2)^2)^{p/2}} +$$

$$+ \int \int\limits_{\Delta^*_{ij}} \frac{L_{rr}(\varphi, \Delta^*_{ij}) d\tau_1 d\tau_2}{((\tau_1 - t_1)^2 + (\tau_2 - t_2)^2)^{p/2}} + R_N(\varphi), \tag{2.11}$$

где $\Delta_{ij}^* = [x_{i-1}, x_{i+2}; x_{j-1}, x_{j+2}] \cap \Omega$, $\Omega = [-1, 1]^2$, $\sum\sum'$ означает суммирование по квадратам Δ_{kl}, не входящим в Δ_{ij}^*.

Теорема 2.7. Пусть $\Psi = C_2^r(1)$. Среди всевозможных кубатурных формул вида (2.3) оптимальной по порядку является формула (2.11). Ее погрешность равна $R_N[\Psi] \asymp N^{-(r+2-p)/2}$.

Доказательство теоремы подобно доказательствам теорем 2.3 (оценка снизу) и 2.4 (оценка сверху) и поэтому опускается.

Покроем область Ω квадратами $\Delta_{kl} = [x_k, x_{k+1}; x_l, x_{l+1}]$, $k, l = 0, 1, \ldots, N-1$, $x_k = -1 + 2k/N$, $k = 0, 1, \ldots, N$.

Пусть $(t_1, t_2) \in \Delta_{ij}$, $i, j = 0, 1, \ldots, N-1$.

Интеграл $H\varphi$ будем вычислять по кубатурной формуле

$$H\varphi = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1}{}' \iint\limits_{\Delta_{kl}} \frac{L_{rr}(\varphi, \Delta_{kl}) d\tau_1 d\tau_2}{((\tau_1 - t_1)^2 + (\tau_2 - t_2)^2)^{p/2}} +$$

$$+ \iint\limits_{\Delta_{ij}^*} \frac{L_{rr}(\varphi, \Delta_{ij}^*) d\tau_1 d\tau_2}{((\tau_1 - t_1)^2 + (\tau_2 - t_2)^2)^{p/2}} + R_N(\varphi), \tag{2.12}$$

где $\Delta_{ij}^* = [x_{i-1}, x_{i+2}; x_{j-1}, x_{j+2}] \cap \Omega$, $\sum\sum'$ означает суммирование по квадратам Δ_{kl}, не включенным в Δ_{ij}^*.

Теорема 2.8. Пусть $\Psi = \bar{W}^{r,r}(1)$. Среди всевозможных кубатурных формул вида (2.3) оптимальной по порядку является формула (2.12). Ее погрешность равна $R_N[\Psi] \asymp N^{-(r+2-p)} \asymp n^{-(r+2-p)/2}$, где $n-$ число узлов кубатурной формулы.

Доказательство теоремы опускается, так как оно подобно доказательствам предыдущих теорем.

Опишем теперь изменения, которые нужно внести в кубатурные формулы и формулировки теорем при вычислении гиперсингулярных интегралов размерности $l (l \geq 2.)$ Для краткости ограничимся случаем, когда $\Psi = C_l^r(1)$.

Покроем область $\Omega = [-1, 1]^l$ кубами $\Delta_{k_1 \cdots k_l} = [x_{k_1}, x_{k_1+1}; \cdots; x_{k_l}, x_{k_l+1}]$, $k_i = 0, 1, \ldots, N-1$, $i = 1, 2, \ldots, l$, $x_{k_i} = -1 + 2k_i/N$, $k_i = 0, 1, \ldots, N$, $i = 1, 2, \ldots, l$.

Пусть $(t_1, \ldots, t_l) \in \Delta_{i_1, \ldots, i_l}$, $0 \leq i_j \leq N-1$, $j = 1, 2, \ldots, l$. Интеграл $H\varphi$ будем вычислять по кубатурной формуле

$$H\varphi = \sum_{k_1=0}^{N-1} \cdots {\sum_{k_l=0}^{N-1}}' \int \cdots \int\limits_{\Delta_{k_1\cdots k_l}} \frac{L_{r,\dots,r}(\varphi, \Delta_{k_1\cdots k_l}) d\tau_1 \cdots d\tau_l}{((\tau_1 - t_1)^2 + \cdots + (\tau_l - t_l)^2)^{p/2}} +$$

$$+ \int \cdots \int\limits_{\Delta^*_{i_1\cdots i_l}} \frac{L_{r,\dots,r}(\varphi, \Delta^*_{i_1,\dots,i_l}) d\tau_1 \cdots d\tau_l}{((\tau_1 - t_1)^2 + \cdots + (\tau_l - t_l)^2)^{p/2}} + R_N(\varphi), \qquad (2.13)$$

где $\Delta^*_{i_1,\dots,i_l} = [x_{i_1-1}, x_{i_1+2}; \cdots; x_{i_l-1}, x_{i_l+2}]$, $\sum\sum'$ означает суммирование по $\Delta_{k_1\cdots k_l}$, не входящим в область $\Delta^*_{i_1\cdots i_l}$.

Теорема 2.9. Пусть $\Psi = \overline{W}^{r,\dots,r}(1)$. Среди всевозможных кубатурных формул вида (2.2) оптимальной по порядку является формула (2.13). Ее погрешность равна

$$R_N[\Psi] \asymp N^{-(r+l-p)} \asymp n^{-(r+l-p)/l},$$

где $n-$ число узлов кубатурной формулы.

Пусть $\Omega = [-1, 1]^l$, $l \geq 2$, $m = [N^{1/l}] + 1$. Покроем область Ω кубами $\Delta_{k_1\cdots k_l} = [x_{k_1}, x_{k_1+1}; \cdots; x_{k_l}, x_{k_l+1}]$, $k_j = 0, 1, \dots, m-1$, $j = 1, 2, \dots, l$, $x_{k_j} = -1 + 2k_j/m$, $k_j = 0, 1, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, l$.

Пусть $(t_1, \dots, t_l) \in \Delta_{i_1,\dots,i_l}$. Интеграл $H\varphi$ будем вычислять по кубатурной формуле

$$H\varphi = \sum_{k_1=0}^{m-1} \cdots {\sum_{k_l=0}^{m-1}}' \int \cdots \int\limits_{\Delta_{k_1\cdots k_l}} \frac{L_{r\cdots r}(\varphi, \Delta_{k_1\cdots k_l}) d\tau_1 \cdots d\tau_l}{((\tau_1 - t_1)^2 + \cdots + (\tau_l - t_l)^2)^{p/2}} +$$

$$+ \int \cdots \int\limits_{\Delta^*_{i_1\cdots i_l}} \frac{L_{r\cdots r}(\varphi, \Delta^*_{i_1\cdots i_l}) d\tau_1 \cdots d\tau_l}{((\tau_1 - t_1)^2 + \cdots + (\tau_l - t_l)^2)^{p/2}} + R_N(\varphi), \qquad (2.14)$$

где $\Delta^*_{i_1,\dots,i_l} = [x_{i_1-1}, x_{i_1+2}; \cdots; x_{i_l-1}, x_{i_l+2}] \bigcap \Omega$, $\sum\sum'$ означает суммирование по кубам $\Delta_{k_1\cdots k_l}$, не входящим в область $\Delta^*_{i_1\cdots i_l}$.

Теорема 2.10. Пусть $\Psi = C_l^r(1)$. Среди всевозможных кубатурных формул вида (2.3) оптимальной по порядку является формула (2.14). Ее погрешность равна

$$R_N[\Psi] \asymp N^{-(r+l-p)/l}.$$

Глава 6

ОПТИМАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ АППРОКСИМАЦИИ СОПРЯЖЕННЫХ ФУНКЦИЙ

1. Введение

В главе 1 отмечалось, что гиперсингулярные интералы, у которых особая точка принимает различные значения в некоторой области Ω, можно рассматривать как сопряженные функции, определенные в области Ω.

В связи с этим возникает задача построения оптимальных методов аппроксимации сопряженных функций. Данная глава посвящена решению этой задачи.

Во втором параграфе дан обзор поперечников Бабенко и Колмогорова функциональных множеств $Q_{r,\gamma}(\Omega, M)$, $Q^u_{r,\gamma}(\Omega, M)$, $\bar{Q}_{r,\gamma}(\Omega, M)$, $\bar{Q}^u_{r,\gamma}(\Omega, M)$, определенных на сегменте $[-1, 1]$.

В третьем параграфе дан обзор поперечников Бабенко и Колмогорова функциональных множеств $Q_{r,\gamma}(\Omega, M)$, $Q^u_{r,\gamma}(\Omega, M)$, $\bar{Q}_{r,\gamma}(\Omega, M)$, $\bar{Q}^u_{r,\gamma}(\Omega, M)$, определенных в кубе $[-1, 1^l]$, $l = 2, 3, \cdots$.

В четвертом параграфе построен наилучший по порядку (по точности) метод аппроксимации сопряженных функций вида

$$\tilde{\varphi}(t) = \int\limits_{-1}^{1} \frac{\varphi(\tau)}{(\tau - t)^p} d\tau, \quad -1 \le t \le 1, \quad p = 2, 3, \dots. \qquad (1.1)$$

Пятый параграф посвящен оптимальным по порядку (по точности) методам аппроксимации сопряженных функций, определяемых гиперсингулярными интегралами вида

$$\tilde{\varphi}(t_1, t_2) = \int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1} \frac{\varphi(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2}{((\tau_1 - t_1)^2 + (\tau_2 - t_2)^2)^{p/2}}, \qquad (1.2)$$

где $(t_1, t_2) \in [-1, 1]^2$, $p_i = 3, 4, \dots$.

Как отмечалось в главе 1 для построения оптимальных методов аппроксимации сопряженных функций $\tilde{\varphi}$ вначале необходимо определить класс $\tilde{\Psi}$, к которому принадлежат функции $\tilde{\varphi}$, если функции φ принадлежат классу функций Ψ, и построить оптимальные методы приближения элементов функциональных множеств $\tilde{\Psi}$. Гладкость сопряженных функций, представимых гиперсингулярными интегралами видов (1.1), (1.2), исследована в главе 2.

Там же отмечалось, что для построения оптимальных методов аппроксимации сопряженных функций вначале необходимо вычислить поперечники Бабенко и Колмогорова соответствующих функциональных множеств и построить локальные сплайны, погрешности которых совпадают по порядку со значениями поперечников. Этому посвящен раздел 2 данной главы.

Отметим, что результаты этой главы распространяются и на сопряженные функции, представимые интегралами:

$$\tilde{\varphi}(t) = \int\limits_{-1}^{1} \frac{\varphi(\tau)}{|\tau - t|^{p+\lambda}}, \quad -1 \le t \le 1, \quad p = 1, 2, \dots, \quad 0 < \lambda < 1;$$

$$\tilde{\varphi}(t_1, t_2) = \int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1} \frac{\varphi(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2}{|\tau_1 - t_1|^{p_1+\lambda_1} |\tau_2 - t_2|^{p_2+\lambda_2}},$$

$(t_1, t_2) \in [-1, 1]^2$, $p_1, p_2 = 1, 2, \dots$, $0 < \lambda_i < 1$, $i = 1, 2$;

$$\tilde{\varphi}(t_1, t_2) = \int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1} \frac{\varphi(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2}{((\tau_1 - t_1)^2 + (\tau_2 - t_2)^2)^{(p+\lambda)/2}},$$

$(t_1, t_2) \in [-1, 1]^2$, $p = 2, 3, \dots$, $0 < \lambda_i < 1$.

Отметим также, что результаты, приведенные в данной главе, могут быть распространены и на сопряженные функции с числом измерений, большим двух.

2. Поперечники функций одной переменной

В начале этого раздела приведем краткий обзор результатов автора по вычислению поперечников Бабенко и Колмогорова на классах $Q_{r,\gamma}(\Omega, M)$, $\Omega = [-1, 1]$.

Теорема 2.1 [12], [13], [15]. Пусть $\Omega = [-1, 1]$. Справедлива оценка $\delta_n(Q_r(\Omega, M)) \asymp d_n(Q_r(\Omega, M), C) \asymp n^{-2r-1}$.

Теорема 2.2. Пусть $\Omega = [-1, 1]$. Тогда справедлива оценка

$$\delta_n(Q_{r,\gamma}(\Omega, M)) \asymp d_n(Q_{r,\gamma}(\Omega, M), C) \asymp n^{-s}.$$

Теорема 2.3. Пусть $\Omega = [-1, 1], \infty \geq p \geq q \geq 1, \gamma-$ целое число. Справедлива оценка $d_n(Q_{r,\gamma,p}(\Omega, M), L_q) \asymp n^{-s}$.

Теорема 2.4. Пусть $\Omega = [-1, 1]$. Справедливы оценки

$$d_n(Q_{r,\gamma,p}(\Omega, M), L_q) \geq A \begin{cases} n^{-s+1/p-1/q}, & q \leq 2, \\ n^{-s+1/p-1/2}, & p \leq 2, q > 2, \\ n^{-s}, & p > 2. \end{cases}$$

Теорема 2.5. Пусть $\Omega = [-1, 1], 1 \leq p < q \leq 2, \gamma-$ целое число. Справедлива оценка $d_n(Q_{r,\gamma,p}(\Omega, M), L_q) \asymp n^{-s+1/p-1/q}$.

Теорема 2.6. Пусть $\Omega = [-1, 1]$, $\infty > p \geq q \geq 1$. Справедлива оценка $d_n(Q_{r,\gamma,p}(\Omega, M, L_q)) \asymp n^{-s}$.

Теорема 2.7. Пусть $\Omega = [-1, 1], p \leq 2, q > 2, \gamma-$ целое число. Справедлива оценка $d_n(Q_{r,\gamma,p}(\Omega, M), L_q) \asymp n^{-s-1/2+1/p}$.

Теорема 2.8. Пусть $\Omega = [-1, 1], 2 \leq p \leq q, \gamma-$ целое число. Справедлива оценка

$$d_n(Q_{r,\gamma,p}(\Omega, M), L_q) \asymp n^{-s}.$$

Теорема 2.9. Пусть $\Omega = [-1, 1]$, $u = 1, 2, \ldots$. Справедлива оценка

$$\delta_n(\bar{Q}^u_{r,\gamma}(\Omega, M)) \asymp d_n(\bar{Q}^u_{r,\gamma}(\Omega, M), C) \asymp n^{-s}.$$

Доказательство. Оценка $\delta_n(\bar{Q}^u_{r,\gamma}(\Omega, M)) \geq An^{-s}$ следует из оценки $\delta_n(Q_{r,\gamma}(\Omega, M)) \geq An^{-s}$, полученной в теореме 2.2, так как множество функций $Q_{r,\gamma}(\Omega, M)$ вложено в множество функций $\bar{Q}^u_{r,\gamma}(\Omega, M)$.

Для оценки сверху поперечника Колмогорова $d_n(\bar{Q}_{r,\gamma}(\Omega, M), C)$ построим непрерывный локальный сплайн, имеющий размерность $O(n)$ и аппроксимирующий функции, принадлежащие компакту $\bar{Q}_{r,\gamma}(\Omega, M)$ с точностью $O(n^{-s})$.

Рассмотрим два случая: 1) $u = 1$; 2) $u \neq 1$.

Вначале рассмотрим случай, когда $u = 1$.

Покроем сегмент $[-1, 1]$ более мелкими сегментами $\Delta_k = [t_k, t_{k+1}]$ и $\Delta^*_k = [\tau_{k+1}, \tau_k]$, где $t_k = -1 + (k/n)^v$, $\tau_k = 1 - (k/n)^v$, $k = 0, 1, \ldots, n$, $v = s/r$. Сегменты Δ_0 и Δ^*_0 покроем еще более мелкими сегментами $\Delta_{0,j} = [t_{0,j}, t_{0,j+1}]$, $t_{0,j} = -1 + j(1/n)^v/L$, $\Delta^*_{0,j} = [\tau_{0,j+1}, \tau_{0,j}]$, $\tau_{0,j} = 1 -$ $- j(1/n)^v/L$, $j = 0, 1, \ldots, L - 1$, $L = [\ln n]$.

В каждом из сегментов $\Delta_{0,j}$, $j = 0, 1, \ldots, L - 1$, Δ_k, Δ^*_k, $k =$ $= 1, 2, \ldots, n-1$, $\Delta^*_{0,j}$, $j = 0, 1, \ldots, L-1$, функция $f(t)$ аппроксимируется интерполяционным полиномом $P_s(f, \Delta_{0,j})$, $j = 0, 1, \ldots, L - 1$, $P_s(f, \Delta_k)$,

$P_s(f,\Delta_k^*)$, $k=1,2,\ldots,n-1$, $P_s(f,\Delta_{0,j}^*)$, $j=0,1,\ldots,L-1$, соответственно. Опишем построение этих полиномов. На сегменте $[a,b]$ функция f приближается интерполяционным полиномом $P_s(t,[a,b])$, который строится следующим образом. Обозначим через $\zeta_k(k=1,2,\ldots,s)$ нули полинома Чебышева первого рода степени s, наименее уклоняющегося от нуля на сегменте $[-1,1]$. Отобразим сегмент $[\zeta_1,\zeta_s]\subset[-1,1]$ на сегмент $[a,b]$ таким образом, чтобы точки ζ_1 и ζ_s перешли в точки a и b . Точки, являющиеся образами точек ζ_i при отображении сегмента $[\zeta_1,\zeta_s]$ на сегмент $[a,b]$, обозначим через $\zeta_i{}'$, $i=1,2,\ldots,s$. По узлам $\{\zeta_i'\}$ строится интерполяционный полином степени $r-1$, который обозначается через $P_s(t,[a,b])$.

Функция $f(t)$, $t\in[-1,1]$ аппроксимируется интерполяционными полиномами $P_s(f,[t_{0,j},t_{0,j+1}])$, $j=0,1,\ldots,L-1$, $P_s(f,[t_k,t_{k+1}])$, $k=1,2,\ldots,N-1$, $P_s(f,[\tau_{0,j+1},\tau_{0,j}])$, $j=0,1,\ldots,L-1$, $P_s(f,[\tau_{k+1},\tau_k])$, $k=1,2,\ldots,N-1$.

Локальный сплайн $f_N(t)$ состоит из полиномов:
$P_s(f,[t_k,t_{k+1}])$, $P_s(f,[\tau_{k+1},\tau_k])$, $k=1,2,\ldots,N-1$;
$P_s(f,[t_{0,j},t_{0,j+1}])$, $P_s(f,[\tau_{0,j+1},\tau_{0,j}])$, $j=0,1,\ldots,L-1$.

Оценим норму $\|f(t)-f_N(t)\|_{C(\Omega)}$. Для $1\le k\le N-1$ имеем

$$\|f(t)-f_N(t)\|_{C(\Delta_k^1)}\le\frac{BM(t_{k+1}-t_k)^s}{(k/N)^{v\gamma}s!}=BN^{-s},\tag{2.1}$$

где $\Delta_k^1=[t_k,t_{k+1}]$. Здесь и всюду ниже через B обозначены константы, не зависящие от N. Аналогичные оценки имеют место на сегментах $\Delta_k^2= =[\tau_{k+1},\tau_k]$, $k=1,2,\ldots,N-1$.

Осталось оценить $\|f(t)-f_N(t)\|_C$ на сегментах $\Delta_{0,j}$, $\Delta_{0,j}^*$, $j=0,1,\ldots,L-1$. Вначале оценим $\|f(t)-f_N(t)\|_C$ на сегменте $\Delta_{0,0}$. Очевидно, $\|f(t)-f_N(t)\|_{C(\Delta_{0,0})}\le AE_{s-1}(f,\Delta_{0,0})\lambda_s$, где $E_s(f,\Delta_{0,0})$– наилучшее приближение функции $f(t)$ на сегменте $\Delta_{0,0}$ полиномами степени не выше s; λ_s– константа Лебега при интерполяции по s узлам полинома Чебышева.

Известны [70] оценки наилучших приближений для функций, производные которых имеют степенные и логарифмические особенности.

Однако для нашей цели достаточно ограничиться оценкой приближения функции $f(t)$ отрезком ряда Тейлора

$$T_{r-1}(f,\Delta_{0,0},-1)=f(-1)+\frac{f'(-1)}{1!}(t+1)+\cdots+\frac{f^{(r-1)}(-1)}{(r-1)!}(t+1)^{r-1}.$$

Воспользовавшись остаточным членом формулы Тейлора в интегральной форме, имеем при $t \in \Delta_{00}$:

$$|f(t) - T_{r-1}(f, \Delta_{0,0}, -1)| \le \frac{1}{(r-1)!} | \int\limits_{-1}^{t} f^{(r)}(v)(t-v)^{r-1} dv | \le$$

$$\le \frac{M}{(r-1)!} | \int\limits_{-1}^{t} (1 + |\ln(1+v)|)(t-v)^{r-1} dv | \le$$

$$\le B(h_{00}^r |\ln h_{00}| + h_{00}^r) \le B \frac{1}{n^s \ln^{r-1} n},$$

где $h_{0k} = |t_{0,k+1} - t_{0,k}|$, $k = 0, 1, \ldots, L-1$.

Таким образом,

$$E_{r-1}(f, \Delta_{0,0}) \le \frac{B}{n^s \ln^{r-1} n}$$

и, следовательно,

$$\|f(t) - P_s(f, \Delta_{0,0})\|_{C(\Delta_{0,0})} \le \frac{B}{n^s \ln^{r-1} n}.$$

Перейдем теперь к оценке точности аппроксимации функции $f(t) \in \in Q_{r,\gamma}(\Omega, M)$ сплайном $f_n(t)$ на сегментах $\Delta_{0,k}$, $k = 1, 2, \ldots, L-1$.

Очевидно,

$$\|f(t) - f_n(t)\|_{C(\Delta_{0,k})} \le \frac{M\lambda_s}{(1+t_{0k})^\gamma} h_{0k}^s \le$$

$$\le \frac{M\lambda_s}{k^\gamma} (n^v \ln n)^\gamma \left(\frac{1}{n^v \ln n}\right)^s = \frac{B}{n^s \ln^r n}.$$

Таким образом, построен непрерывный локальный сплайн $f_n(t)$, аппроксимирующий функцию $f(t)$ с точностью $\|f(t) - f_n(t)\|_C \le Bn^{-s}$.

Размерность сплайна $f_n(t)$ при целом γ не превосходит $4sn$. Поэтому $d_{4(s+1)n}(\bar{Q}_{r,\gamma}(\Omega, M), C) \le Bn^{-s}$ и, следовательно, $d_n(\bar{Q}_{r,\gamma}(\Omega, M), C) \le \le Bn^{-s}$.

Из проведенных выше выкладок следует, что справедливы неравенства $\delta_n(\bar{Q}_{r,\gamma}(\Omega, M)) \ge Bn^{-s}$; $d_n(\bar{Q}_{r,\gamma}(\Omega, M), C) \le Bn^{-s}$.

Из этих неравенств и леммы 2.1 главы 1 следует, что

$$\delta_n(\bar{Q}_{r,\gamma}(\Omega, M)) \asymp d_n(\overline{Q}_{r,\gamma}(\Omega, M), C) \asymp n^{-s}.$$

В случае $u = 1$ теорема доказана.

Рассмотрим случай, когда $2 \le u$. Разделим сегмент $[-1,1]$ на $2N$ частей точками $t_k = -1 + \left(\frac{k}{N}\right)^v$, $\tau_k = 1 - \left(\frac{k}{N}\right)^v$, $k = 0, 1, \ldots, N$, $v = s/(s-$ $-\gamma)$. Обозначим через Δ_k^1 и Δ_k^2 сегменты $\Delta_k^1 = [t_k, t_{k+1}]$ и $\Delta_k^2 = [\tau_{k+1}, \tau_k]$, $k = 0, 1, \ldots, N-1$. Введем числа $M_0 = [\ln^{u/r} N]$ и $M_k = [\ln^{(u-1)/s}(N/k)]$, $k = 1, 2, \ldots, N$. В случае, если $\ln^{(u-1)/s}(N/k) \le 1$, полагаем $M_k = 1$. Каждый из сегментов Δ_k^1 и Δ_k^2 разделим на M_k равных частей, $k =$ $= 0, 1, \ldots, N-1$. Сегменты, полученные в результате деления, обозначим через $\Delta_{k,j}^i$, $i = 1, 2$, $j = 0, 1, \ldots, M_k - 1$, $k = 0, 1, \ldots, N-1$.

В каждом сегменте $\Delta_{k,j}^i$ функцию $f(t)$ будем приближать интерполяционным полиномом $P_s(f, \Delta_{k,j}^i)$, $i = 1, 2$, $k = 0, 1, \ldots, N-1$, $j =$ $= 0, 1, \ldots, M_k - 1$. Сплайн, составленный из полиномов $P_s(f, \Delta_{k,j}^i)$, $i =$ $= 1, 2$, $j = 0, 1, \ldots, M_k - 1$, $k = 0, 1, \ldots, N-1$, обозначим через $f_N(t)$.

Оценим точность аппроксимации функции $f(t)$ сплайном $f_N(t)$.

Пусть $t \in \Delta_0^i$, $i = 1, 2$. Очевидно,

$$\|f(t) - f_N(t)\|_{C(\Delta_{0,0}^1)} \le AE_{s-1}(f, \Delta_{0,0}^1)\lambda_s,$$

где $\Delta_{0,0}^1 = [t_{0,0}, t_{0,1}]$, $E_s(f, [a,b])-$ наилучшее приближение функции $f(t)$ на сегменте $[a,b]$ полиномом s-го порядка; λ_s- константа Лебега.

Используя отрезок ряда Тейлора $T_{r-1}(f, \Delta_{0,0}^1, -1)$, покажем, что

$$E_{r-1}(f, \Delta_{0,0}^1) \le \|f(t) - T_{r-1}(f, \Delta_{0,0}^1, -1)\|_{C(\Delta_{0,0})} \le$$

$$\le \frac{1}{(r-1)!} \max_{t \in \Delta_{0,0}^1} \left| \int_{-1}^{t} f^{(r)}(\tau)(t-\tau)^{r-1} d\tau \right| \le$$

$$\le \frac{M}{(r-1)!} \max_{t \in \Delta_{0,0}^1} \left| \int_{-1}^{t} (1 + |\ln^u(1+\tau)|)(t-\tau)^{r-1} d\tau \right| \le$$

$$\le B(h_{00}^r |\ln^u h_{00}|) \le B\left(\frac{1}{N^v M_0}\right)^r \left|\ln^u\left(\frac{1}{N^v M_0}\right)\right| \le$$

$$\le B\frac{1}{N^s \ln^u N}(\ln^u N + \ln^u \ln N) = B\frac{1}{N^s},$$

где $h_{00} = h_0/M_0$, $h_0 = t_1^1 - t_0$.

Аналогичным образом оцениваются значения $E_{r-1}(f, \Delta_{0,j}^1)$, $j = 1, 2, \ldots,$ $M_0 - 1$ и $E_{r-1}(f, \Delta_{0,j}^2)$, $j = 0, 1, \ldots, M_0 - 1$.

Так как константа Лебега по узлам полиномов Чебышева первого рода $\lambda_s \le B \ln s$, окончательно имеем $\|f(t) - f_N(t)\|_{C(\Delta_0^i)} \le BN^{-s}$, $i = 1, 2$.

Оценим $\|f(t)-f_N(t)\|_{C(\Delta^i_{kj})}$, $i=1,2$, $j=0,1,\dots,M_k-1$, $k=$ $=1,2,\dots,N-1$.

Очевидно,

$$\|f(t)-f_N(t)\|_{C(\Delta^1_{k,1})}\leq$$
$$\leq\frac{B(t^1_{k,1}-t^1_{k,0})^s}{s!}\left(\frac{N}{k}\right)^{v\gamma}\left(1+\left|\ln^{u-1}\left(\frac{N}{k}\right)^{v\gamma}\right|\right)\leq$$
$$\leq B\left(\frac{h_k}{M_k}\right)^s\left(\frac{N}{k}\right)^{v\gamma}\left(1+\ln^{u-1}\frac{N}{k}\right)\leq$$
$$\leq B\left(\left(\left(\frac{k+1}{N}\right)^v-\left(\frac{k}{N}\right)^v\right)\frac{1}{\left(\ln\frac{N}{k}\right)^{(u-1)/s}}\right)^s\left(\frac{N}{k}\right)^{v\gamma}\left(1+\ln^{u-1}\frac{N}{k}\right)\leq$$
$$\leq B\frac{(k+\theta)^{(v-1)s-v\gamma}}{N^s}\leq\frac{B}{N^s}.$$

Аналогичным образом оцениваются нормы

$$\|f(t)-f_N(t)\|_{C(\Delta^1_{k,j})},\quad j=1,2,\dots,M_k-1,\quad k=1,2,\dots,N-1;$$
$$\|f(t)-f_N(t)\|_{C(\Delta^2_{k,j})},\quad j=0,1,\dots,M_k-1,\quad k=1,2,\dots,N-1.$$

Собирая полученные выше оценки, имеем:

$$\|f(t)-f_N(t)\|_{C([-1,1])}\leq BN^{-s}.$$

Оценим число узлов, используемых при построении локального сплайна.

Для этого оценим число сегментов $\Delta^i_{k,j}$, $i=1,2$, $j=0,1,\dots,M_k-1$, $k=0,1,\dots,N-1$.

Очевидно, при $u-1\leq s$ имеем

$$m=2\sum_{k=0}^{N-1}M_k\leq 2\left(\ln^{\frac{u}{r}}N+\sum_{k=1}^{N-1}\ln^{\frac{u-1}{s}}\frac{N}{k}\right)\leq$$
$$\leq 2\left(\ln^{\frac{u}{r}}N+\sum_{k=1}^{N-1}\ln\frac{N}{k}\right)=BN.$$

Рассмотрим общий случай.

Пусть $q=(u-1)/s$. Тогда

$$m=2\sum_{k=0}^{N-1}M_k\leq 2\left(\ln^{\frac{u}{r}}N+\sum_{k=1}^{N-1}\ln^{\frac{u-1}{s}}\frac{N}{k}\right)\leq$$

$$\leq B\left(N+\sum_{k=2}^{N-1}\ln^q\frac{N}{k}\right)=B\left(N+\sum_{k=2}^{N-1}\left|\ln^q\frac{N}{k}\right|\right)\leq$$

$$\leq B\left(N+\int_1^N\left|\ln^q\frac{N}{x}\right|dx\right)\leq$$

$$\leq B\left(N+N\int_1^N\frac{\ln^q t}{t^2}dt\right)\leq BN.$$

Следовательно, общее число узлов, используемых при построении локального сплайна $f_N(t)$, равно $n=sm=BN$.

Отсюда следует, что

$$\|f(t)-f_N(t)\|_{C([-1,1])}\leq BN^{-s}.$$

Сопоставляя это неравенство с оценкой (2.1) и используя лемму 2.1 из главы 1, завершаем доказательство теоремы при $2\leq u$.

Теорема 2.10. Пусть $\Omega=[-1,1]$, $r,u-$ натуральные числа; $\gamma-$ положительное нецелое число. Справедлива оценка

$$\delta_n(Q^u_{r\gamma}(\Omega,M))\asymp d_n(Q^u_{r\gamma}(\Omega,M),C)\asymp n^{-s}.$$

Доказательство. Вначале оценим снизу величину $\delta_n(Q^u_{r\gamma}(\Omega,M))$. Для этого заметим, что класс функций $Q_{r,\gamma}(\Omega,M)$ вложен в класс функций $Q^u_{r,\gamma}(\Omega,M)$. Теорема 1.1 утверждает, что $\delta_n(Q_{r\gamma}(\Omega,M))\geq An^{-s}$. Следовательно, $\delta_n(Q^u_{r\gamma}(\Omega,M))\geq An^{-s}$. Оценка снизу получена.

Разделим сегмент $[-1,1]$ на $2N$ частей точками $t_k=-1+(k/N)^v$ и $\tau_k=1-(k/N)^v$, где $k=0,1,\ldots,N$ и $v=s/(s-\gamma)$. Разделим сегмент $[t_0,t_1]$ на M_0 ($M_0=[\ln^{u/(r+1-\mu)}\frac{N}{k}]$) частей точками $t_{0,j}=t_0+(t_1-t_0)j/M_0$, $j=0,1,\ldots,M_0$. Аналогично разделим сегмент $[\tau_1,\tau_0]$ на M_0 частей точками $\tau_{0,j}=\tau_0-(\tau_0-\tau_1)j/M_0$, $j=0,1,\ldots,M_0$. Разделим сегменты $\Delta^1_k=[t_k,t_{k+1}]$ на M_k ($M_k=[\ln^{u/s}N/k]$) частей точками $t_{k,j}=t_k+$ $+(t_{k+1}-t_k)j/M_k$, $j=0,1,\ldots,M_k$. Аналогично, разделим сегмент $\Delta^2_k=$ $=[\tau_{k+1},\tau_k]$ на M_k частей точками $\tau_{kj}=\tau_{k+1}+(\tau_k-\tau_{k+1})j/M_k$, $j=$ $=0,1,\ldots,M_k$.

Функцию $f(t)$, $t\in[-1,1]$ будем аппроксимировать интерполяционными полиномами $P_s(f,\Delta^1_0)$, $\Delta^1_0=[t_{0,j},\ t_{0,j+1}]$, $j=0,1,\ldots,M_0-1$, $P_s(f,\Delta^1_{k,j})$, $\Delta^1_{k,j}=[t^1_{k,j},t^1_{k,j+1}])$, $j=0,1,\cdots,M_k$, $k=1,2,\ldots,N-1$, $P_s(f,\Delta^2_{0,j})$, $\Delta^2_{0,j}=[\tau_{0,j+1},\tau_{0,j}]$, $j=0,1,\ldots,M_0-1$, $P_s(f,\Delta^2_{k,j})$, $\Delta^2_{k,j}=$ $=[\tau_{k+1,j+1},\tau_{k+1,j}]$, $j=0,1,\cdots,M_k$, $k=1,2,\ldots,N-1$.

Локальный сплайн $f_N(t)$ состоит из полиномов $P_s(f,\Delta^1_{0j})$, $j=0,1,\ldots,$ M_0-1, $P_s(f,\Delta^1_{k,j})$, $j=0,1,\cdots,M_k$, $k=1,2,\ldots,N-1$, $P_s(f,\Delta_{0,j})$, $j=0,1,\ldots,M_0-1$, $P_s(f,\Delta^2_{k,j})$, $j=0,1,\cdots,M_k$, $k=1,2,\ldots,N-1$.

Оценим величину $||f(t)-f_N(t)||_C$.

При $1\le k\le N-1$ имеем

$$||f(t)-f_N(t)||_{C(\Delta^1_k)}\le \frac{BM(t_{k+1}-t_k)^s}{s!}\left(\frac{N}{k}\right)^{v\gamma}\left(1+\left|\ln^u\left(\frac{k}{N}\right)^v\right|\right)\le$$

$$\le B\left(\left(\left(\frac{k+1}{N}\right)^v-\left(\frac{k}{N}\right)^v\right)\frac{1}{M_k}\right)^s\left(\frac{N}{k}\right)^{v\gamma}\left(1+\left|\ln^u\left(\frac{N}{k}\right)^v\right|\right)\le$$

$$\le B\left(\left(\frac{k+1}{N}\right)^v-\left(\frac{k}{N}\right)^v\right)^s\left(\frac{N}{k}\right)^{v\gamma}\left(\frac{1}{1+\ln^{\frac{u}{s}}\frac{N}{k}}\right)^s\left(1+\left|\ln^u\left(\frac{N}{k}\right)^v\right|\right)\le\frac{B}{N^s}.$$

Аналогичным образом оцениваются нормы $||f(t)-f_N(t)||_{C(\Delta^2_k)}\le\frac{B}{N^s}$, $k=1,2,\ldots,N-1$.

При $k=0$ имеем $||f(t)-f_N(t)||_{C(\Delta^1_{00})}\le ME_r(f,\Delta^1_{00})\lambda_s$, где $\Delta^1_{00}=$ $=[t_{00},t_{0,1}]$, $E_s(f,[a,b])-$ наилучшее приближение функции $f(t)$ на сегменте $[a,b]$ полиномом s-го порядка; λ_s- константа Лебега.

Используя отрезок ряда Тейлора $T_r(f,\Delta^1_{0,0},-1)$, оценим

$$E_r(f,\Delta^1_{0,0})\le ||f(t)-T_{r-1}(f,\Delta^1_{0,0},-1)||_{C(\Delta^1_{0,0})}\le$$

$$\le\frac{M}{(r-1)!}\max_{t\in\Delta^1_{0,0}}\left|\int\limits_{-1}^{t}\frac{(1+|\ln^u(1+\tau)|)}{(1+\tau)^\mu}(t-\tau)^r d\tau\right|\le$$

$$\le Bh_{00}^{r+1-\mu}|\ln^u h_{00}|\le B\frac{1}{N^s}.$$

Здесь $h_{00}=\left(\frac{1}{N}\right)^v\frac{1}{(1+|\ln(\frac{1}{N})^v|)^{u/(r+1-\mu)}}$.

Аналогичным образом оцениваются нормы $||f(t)-f_N(t)||_{C(\Delta^1_{0,j})}$, $j=$ $=1,2,\ldots,M_0-1$ и $||f(t)-f_N(t)||_{C(\Delta^2_{0,j})}$, $j=0,1,\ldots,M_0-1$.

Таким образом, получена оценка

$$||f(t)-f_N(t)||_{C(\Omega)}\le\frac{B}{N^s}. \tag{2.2}$$

Оценим число n узлов локального сплайна $f_N(t)$.

Повторяя рассуждения, приведенные при доказательстве предыдущей теоремы, убеждаемся в том, что $n\asymp N$. Отсюда и из (2.2) следует справедливость теоремы.

Заканчивая этот раздел, вычислим поперечники Бабенко и Колмогорова функциональных множеств $\tilde{\Psi}$, определяемых гиперсингулярными интегралами

$$\tilde{\varphi}(t) = \int_{-1}^{1} \frac{\varphi(\tau)}{(\tau - t)^p} d\tau, \quad p = 2, 3, \ldots, \quad -1 \le t \le 1,$$

в предположении, что функции $\varphi(t)$ принадлежат функциональному множеству Ψ. В качестве Ψ возьмем множества функций $W^r(1)$, $W_q^r(1)$, $r = 1, 2, \ldots$, $q = 0, 1, \ldots, r$.

Во второй главе была исследована гладкость сопряженных функций $\tilde{\varphi}(t)$ в предположении, что $\varphi(t) \in W^r(1)$ и $\varphi(t) \in W_q^r(1)$. Было показано, что в этих случаях сопряженные функции принадлежат функциональным множествам $L_{0,s,\gamma}(\Omega, M)$, $\overline{L}_{0,s,\gamma}(\Omega, M)$ и $\bar{Q}_{r,\gamma}(\Omega, M)$.

Поперечники Колмогорова на классах $L_{0,s,\gamma}(\Omega, M)$, $\bar{L}_{0,s,\gamma}(\Omega, m)$ при $\gamma > 0$ в метрике пространства $C(\Omega)$ равны бесконечности и, следовательно, равномерная аппроксимация функций из этих классов в метрике пространства $C(\Omega)$ невозможна. Поперечники классов функций $Q_r(\Omega, M)$, $\bar{Q}_r(\Omega, M)$ вычислены выше.

3. Поперечники функций многих переменных

В начале этого раздела приведем краткий обзор результатов автора по вычислению поперечников Бабенко и Колмогорова на классах $Q_{r,\gamma}(\Omega, M)$, $\Omega = [-1, 1]^l$, опубликованных в [11], [13], [15].

Теорема 3.1. Пусть $\Omega = [-1, 1]^l, l \ge 2$. Тогда справедлива оценка

$$\delta_n(Q_r(\Omega, M)) \asymp d_n((Q_r(\Omega, M)), C) \asymp n^{-r/(l-1)}.$$

Теорема 3.2. Пусть $\Omega = [-1, 1]^l, l \ge 2$. Справедливы оценки

$$d_n(Q_{r,\gamma}(\Omega, M), C) \asymp \delta_n(Q_{r,\gamma}(\Omega, M)) \asymp$$

$$\asymp \begin{cases} n^{-(s-\gamma)/(l-1)} & v > l/(l-1), \\ n^{-s/l}(\ln n)^{s/l} & v = l/(l-1), \\ n^{-s/l} & v < l/(l-1), \end{cases}$$

где $v = s/(s - \gamma)$.

Теорема 3.3. Пусть $\Omega = [-1,1]^l, l \geq 2, \gamma-$ целое число, $v = (s - - l/p + l/q)/(s - l/p + l/q - \gamma)$. Справедливы оценки

$$d_n(Q_{r,\gamma,p}(\Omega, M), L_q) \geq B \begin{cases} n^{-(s-\gamma-l/p+l/q)/(l-1)}, & q \leq 2, \\ n^{-(s-\gamma-l/p+l/q)/(l-1)+1/q-1/2}, & p \leq 2, q > 2, \\ n^{-(s-\gamma-l/p+l/q)/(l-1)-1/p+1/q}, & p > 2 \end{cases}$$

при $v > l/(l-1)$;

$$d_n(Q_{r,\gamma,p}(\Omega, M), L_q) \geq B \begin{cases} n^{-s/l+1/p-1/q}, & q \leq 2, \\ n^{-s/l+1/p-1/2}, & p \leq 2, q > 2, \\ n^{-s/l}, & p > 2 \end{cases}$$

при $v < l/(l-1)$;

$$d_n(Q_{r,\gamma,p}(\Omega, M), L_q) \geq B \begin{cases} (\frac{\ln n}{n})^{s/l-1/p+1/q}, & q \leq 2, \\ \frac{(\ln n)^{s/l-1/p+1/q}}{n^{s/l-1/p+1/2}}, & p \leq 2, q > 2, \\ \frac{(\ln n)^{s/l+1/p-1/q}}{n^{s/l}}, & p > 2 \end{cases}$$

при $v = l/(l-1)$.

Теорема 3.4. Пусть $\Omega = [-1,1]^l$, $l \geq 2$. Справедлива оценка

$$\delta_n(Q_{r,\gamma,p}(\Omega, M)) \geq B \begin{cases} n^{-(s-\gamma-1/p)/(l-1)}, & v > l/(l-1), \\ n^{-s/l}, & v < l/(l-1), \\ n^{-s/l}(\ln n)^{s/l-1/p}, & v = l/(l-1), \end{cases}$$

где $v = (s - l/p)/(s - \gamma - l/p)$.

Теорема 3.5. Пусть $\Omega = [-1,1]^l$, $l \geq 2$, $q \leq p$, $\gamma-$ целое число.

Справедлива оценка

$$d_n(Q_{r,\gamma,p}(\Omega, M), L_q) \asymp \begin{cases} n^{-r/(l-1)}, & v > l/(l-1), \\ n^{-s/l}, & v < l/(l-1), \\ (n/\ln n)^{-s/l}, & v = l/(l-1), \end{cases}$$

где $v = s/(s-\gamma)$.

Теорема 3.6. Пусть $\Omega = [-1,1]^l$, $l \geq 2$, $p < q \leq 2$, $v = (s - l/p+ +l/q)/(s - l/p + l/q - \gamma)$, $\gamma-$ целое число. Справедлива оценка

$$d_n(Q_{r,\gamma,p}(\Omega, M), L_q) \asymp \begin{cases} n^{-(r-l/p+l/q)/(l-1)}, & v > l/(l-1), \\ n^{-(s-l/p+l/q)/l}, & v < l/(l-1), \\ (n/\ln n)^{-(s-l/p+l/q)/l}, & v = l/(l-1). \end{cases}$$

Теорема 3.7. Пусть $\Omega = [-1, 1]^l$, $l \geq 2$, $p \leq 2$, $q > 2$, $\gamma-$ целое число. Справедлива оценка

$$d_n(Q_{r,\gamma}(\Omega, M), L_q) \asymp$$

$$\asymp \begin{cases} n^{-(r-l/p+l/q)/(l-1)+1/q-1/2}, & v > l/(l-1), \\ n^{-(s/l-1/p+1/2)}, & v < l/(l-1), \end{cases}$$

$v = (s - l/p + l/q)/(s - l/p + l/q - \gamma)$.

Теорема 3.8. Пусть $\Omega = [-1, 1]^l$, $l \geq 2$, $u = 1, 2, \cdots$, $v = s/(s - \gamma)$. Тогда справедлива следующая оценка:

$$\delta_n(\bar{Q}^u_{r\gamma}(\Omega, M)) \geq$$

$$\geq \begin{cases} n^{-s/l}, & v < l/(l-1), \\ (\ln n/n)^{s/l}, & v = l/(l-1). \end{cases}$$

Доказательство. Оценим снизу величину поперечника $\delta_n(\bar{Q}^u_{r\gamma}(\Omega, M))$. Заметим, что функциональное множество $Q_{r\gamma}(\Omega, M)$ вкладывается в функциональное множество $\bar{Q}^u_{r\gamma}(\Omega, M)$ при произвольных $u, u = 1, 2, \ldots$.

В теореме 3.1 было показано, что

$$\delta_n(Q_{r\gamma}(\Omega, M)) \asymp$$

$$\asymp \begin{cases} n^{-s/l}, & v < l/(l-1), \\ (\ln n/n)^{s/l}, & v = l/(l-1). \end{cases}$$

Следовательно,

$$\delta_n(\bar{Q}^u_{r\gamma}(\Omega, M)) \geq \delta_n(Q_{r\gamma}(\Omega, M)) \asymp$$

$$\asymp \begin{cases} n^{-s/l}, & v < l/(l-1), \\ (\ln n/n)^{s/l}, & v = l/(l-1). \end{cases} \tag{3.1}$$

Из этого неравенства и леммы 2.1 главы 1 следует справедливость теоремы.

Построим непрерывный сплайн, аппроксимирующий функции, принадлежащие функциональному классу $\bar{Q}^1_{r\gamma}(\Omega, M)$ при $v < l/(l-1)$ и при $v = l/(l-1), r \geq l$.

Обозначим через Δ_k множество точек $t = (t_1, \ldots, t_l) \in \Omega$, таких, что их расстояние $d(t, \Gamma)$ до границы Γ области Ω удовлетворяет неравенству $(k/N)^v \leq d(t, \Gamma) \leq ((k+1)/N)^v$, $k = 0, 1, \ldots, N-1$. Здесь $d(t, \Gamma) = \min_{1 \leq i \leq l} \min(|t_i - 1|, |t_i + 1|)$.

Каждую область Δ_k, $k = 0, 1, \ldots, N-1$, покроем кубами и параллелепипедами $\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l}$, ребра которых параллельны координатным плоскостям и длины которых равны или меньше чем $h_k = ((k+1)/N)^v - -(k/N)^v, k = 0, 1, \ldots, N-1$.

Заметим, что область Δ_{k-1} покрывается кубами $\Delta^{k-1}_{i_1,\ldots,i_l}$ таким образом, что вершины кубов $\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l}$, лежащие на соответствующих гранях, входят в число вершин кубов $\Delta^{k-1}_{i_1,\ldots,i_l}$.

Покроем каждый куб $\Delta^0_{i_1,\ldots,i_l}$ более мелкими кубами $\Delta^0_{i_1,\ldots,i_l;j_1,\ldots,j_l}$, ребра которых параллельны координатным плоскостям и длины которых не больше чем $h_0^* = h_0/M_0$, где $M_0 = [(\ln N)^{1/r}]$.

Заметим, что область Δ_0 покрывается кубами $\Delta^0_{i_1,\ldots,i_l,j_1,\ldots,j_l}$ таким образом, чтобы вершины кубов $\Delta^1_{i_1,\ldots,i_l}$ входили в число точек разбиения.

Обозначим через n число кубов $\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l}$ покрывающих область Ω. Это число равно

$$n \asymp \begin{cases} N^l, & v < l/(l-1), \\ N^l \ln N, & v = l/(l-1). \end{cases} \tag{3.2}$$

В разделе 2 был построен интерполяционный полином $P_s(f, [a,b])$. В случае функций l переменных $f(t_1, \ldots, t_l)$ введем интерполяционный полином $P_{s,\ldots,s}(f, [a_1, b_1; \ldots; a_l, b_l]) = P^{t_1}_s[P^{t_2}_s[\cdots P^{t_l}_s[f; [a_l, b_l]], [a_{l-1}, b_{l-1}]], \cdots, [a_1, b_1]]$ степени $(s-1)$ по каждой переменной $t_1, \ldots, t_l$. Полином $P^{t_l}_l[f; [a_l, b_l]]$ интерполирует функцию $f(t_1, \ldots, t_l)$ по переменной t_l на сегменте $[a_l, b_l]$, полином $P^{t_{l-1}}_{l-1}[P^{t_l}_l[f; [a_l, b_l]; [a_{l-1}, b_{l-1}]]]$ интерполирует функцию $P^{t_l}_s[f, [a_l, b_l]]$ по переменной t_{l-1} на сегменте $[a_{l-1}, b_{l-1}]$ и т. д.

Покрытие области Ω кубами $\Delta^k_{i_1,\cdots,i_l}$ описано выше. Рассмотрим куб Δ_{N-1}. В этом кубе функция $f(t_1, \ldots, t_l)$ аппроксимируется интерполяционным полиномом $f_N(t_1, \ldots, t_l) = P_{s,\ldots,s}(f(t_1, \ldots, t_l); \Delta_{N-1})$.

Рассмотрим область Δ_{N-2}. Эта область покрыта кубами и параллелепипедами $\Delta^{N-2}_{i_1,\ldots,i_l}$, длины ребер которых не больше h_{N-2}.

Напомним, что область Δ_{N-2} покрыта кубами $\Delta^{N-2}_{i_1,\ldots,i_l}$ таким образом, что вершины куба Δ_{N-1}, лежащие на соответствующих гранях, входят в число точек разбиения.

В каждом кубе $\Delta^{N-2}_{i_1,\ldots,i_l}$ полином $f_N(t_1, \ldots, t_l; \Delta^{N-2}_{i_1,\ldots,i_l})$ определяется формулой

$$f_N(t_1, \ldots, t_l; \Delta^{N-2}_{i_1,\ldots,i_l}) = P_{s,\ldots,s}(\tilde{f}(t_1, \ldots, t_l), \Delta^{N-2}_{i_1,\ldots,i_l}),$$

где функция $\tilde{f}(t_1, \ldots, t_l)$ равна $f(t_1, \ldots, t_l)$ во всех узлах интерполяции, кроме узлов, расположенных на гранях куба Δ_{N-1}. В этих узлах величина $\tilde{f}(t_1, \dots, t_l)$ полагается равной значениям полинома $P_{s,\dots,s}(f(t_1, \dots, t_l), \Delta_{N-1})$. В каждом кубе $\Delta^0_{i_1,\dots,i_l;j_1,\dots,j_l}$, $\Delta^k_{i_1,\dots,i_l}$ будем аппроксимировать функцию $f(t)$ интерполяционным полиномом $P_{s,\dots,s}(f, \Delta^0_{i_1,\dots,i_l;j_1,\dots,j_l})$, $P_{s,\dots,s}(f, \Delta^k_{i_1,\dots,i_l})$, $k = 1, 2, \dots, N-1$, который строится аналогично. Непрерывный локальный сплайн $f_N(t)$ состоит из полиномов $P_{s,\dots,s}(f, \Delta^0_{i_1,\dots,i_l;j_1,\dots,j_l})$, $P_{s,\dots,s}(f, \Delta^k_{i_1,\dots,i_l})$, $k = 1, 2, \dots, N-1$.

Общее число кубов $\Delta^k_{i_1,\dots,i_l}$ и $\Delta^0_{i_1,\dots,i_l,j_1,\dots,j_l}$, которые покрывают Ω, равно

$$n \asymp \begin{cases} N^l, & v < l/(l-1), \\ N^l \ln N, & v = l/(l-1), r \geq l. \end{cases} \tag{3.3}$$

Легко показать, что для $k \geq 1$

$$\|f(t) - f_N(t)\|_{C(\Delta^k_{i_1,\dots,i_l})} \leq BN^{-s}. \tag{3.4}$$

Пусть $k = 0$. В этом случае имеем

$$\|f(t) - f_N(t)\|_{C(\Delta^0_{i_1,\dots,i_l;j_1,\dots,j_l})} \leq$$

$$\leq BE_{r-1,\dots,r-1}(f; \Delta^0_{i_1,\dots,i_l;j_1,\dots,j_l})\lambda^l_r, \tag{3.5}$$

где $E_{r,\dots,r}(f; \Delta^0_{i_1,\dots,i_l;j_1,\dots,j_l})$—наилучшее приближение функции f полиномами r-го порядка по каждой переменной в кубе $\Delta^0_{i_1,\dots,i_l;j_1,\dots,j_l}$.

Оценим величину $E_{r,\dots,r}(f, \Delta^0_{i_1,\dots,i_l;j_1,\dots,j_l})$. Для этого воспользуемся формулой Тейлора с остаточным членом в интегральной форме. Известно [66], что

$$f(t_1, \dots, t_l) = \sum_{k=0}^{r} \frac{1}{k!} \sum_{j_1=1}^{l} \cdots \sum_{j_k=1}^{l} (t_{j_1} - t^0_{j_1}) \cdots (t_{j_k} - t^0_{j_k}) \frac{\partial^k f(t^0)}{\partial t_{j_1} \cdots \partial t_{j_k}} +$$

$$+ R_{r+1}(t), \tag{3.6}$$

где

$$R_{r+1}(t) = \frac{1}{r!} \int_0^1 (1-\tau)^r \sum_{j_1=1}^{l} \cdots \sum_{j_{r+1}=1}^{l} (t_{j_1} - t^0_{j_1}) \cdots$$

$$\cdots (t_{j_{r+1}} - t^0_{j_{r+1}}) \frac{\partial^{r+1} f(t^0 + \tau(t - t^0))}{\partial t_{j_1} \cdots \partial t_{j_{r+1}}} d\tau =$$

$$= l \sum_{|k|=r+1} \frac{(t-t^0)^k}{k!} \int_0^1 (1-\tau)^r f^{(k)}(t^0 + \tau(t - t^0)) d\tau.$$

Оценим $|R_r(t)|$ для функций $f(t) \in \bar{Q}^1_{r\gamma}(\Omega, M)$. Очевидно, при $t \in \in \Delta^0_{i_1,\dots,i_l;j_1,\dots,j_l}$ имеем

$$|R_r(t)| \leq B|\int\limits_0^1 (1-\tau)^{r-1} M|t+1|^r (1+|\ln \tau(t+1)|) d\tau \leq$$

$$\leq B h^r_{00} |\ln h_{00}| \leq B \left(\frac{1}{N^v} \frac{1}{\ln^{1/r} N}\right)^r \ln N \leq B \frac{1}{N^s}.$$

Следовательно,

$$\|f(t) - f_N(t)\|_{C(\Delta^0_{i_1,\dots,i_l;j_1,\dots,j_l})} \leq BN^{-s}. \qquad (3.7)$$

Объединяя неравенства (3.4), (3.5), (3.7), получаем оценку:

$$\|f(t) - f_N(t)\|_{C(\Omega)} \leq BN^{-s}.$$

Используя эту оценку, неравенства (3.1), (3.3) и лемму 2.1 из главы 1, завершаем доказательство следующего утверждения.

Теорема 3.9. Пусть $\Omega = [-1, 1]^l$, $l \geq 2$, $v = s/(s-\gamma)$, $v < l/(l-1)$ или $v = l/(l-1)$ и $r \geq l$. Тогда

$$\delta_n(\bar{Q}^1_{r\gamma}(\Omega, M)) \asymp d_n(\bar{Q}^1_{r\gamma}(\Omega, M), C) \asymp \begin{cases} N^{-s/l}, & v < l/(l-1), \\ (\ln n/n)^{s/l}, & v = l/(l-1), \quad r \geq l. \end{cases}$$

Рассмотрим случай, когда $v > l/(l-1)$.

Теорема 3.10. Пусть $\Omega = [-1, 1]^l$, $l \geq 2$, $v = s/(s-\gamma), v > l/(l-1)$. Тогда справедлива следующая оценка: $\delta_n(\bar{Q}^1_{r\gamma}(\Omega, M)) \geq Bn^{-(s-\gamma)/(l-1)}$.

Доказательство. Нетрудно видеть, что класс функций $Q_{r\gamma}(\Omega, M)$ вложен в класс функций $\bar{Q}^1_{r\gamma}(\Omega, M)$. Из теоремы 3.2 следует неравенство $\delta_n(Q_{r\gamma}(\Omega, M)) \geq Bn^{-(s-\gamma)/(l-1)}$. Следовательно, $\delta_n(\bar{Q}^1_{r\gamma}(\Omega, M)) \geq \geq Bn^{-(s-\gamma)/(l-1)}$.

Теорема доказана.

Построим непрерывный локальный сплайн для аппроксимации функций $f(t) \in \bar{Q}^u_{r\gamma}(\Omega, M)$ при $v > l/(l-1)$.

Покроем куб Ω областями $\Delta^k_{i_1,\cdots,i_l}, k = 0, 1, \cdots, N-1$, построение которых описано выше при доказательстве теоремы 3.9.

Нетрудно видеть, что общее число n кубов $\Delta^k_{i_1,\cdots,i_l}$ оценивается выражением

$$n \asymp N^{v(l-1)}. \qquad (3.10)$$

Рассмотрим куб Δ_{N-1}. В этом кубе функция $f(t_1, \dots, t_l)$ аппроксимируется полиномом $f_N(t_1, \dots, t_l) = P_{s,\dots,s}(f(t_1, \dots, t_l); \Delta_{N-1})$.

Рассмотрим область Δ_{N-2}. Эту область покроем кубами и параллелепипедами $\Delta^{N-2}_{i_1,\dots,i_l}$, длины ребер которых не превышают h_{N-2}.

Отметим, что область Δ_{N-2} покрывается кубами и параллелепипедами $\Delta^{N-2}_{i_1,\dots,i_l}$ таким образом, что вершины куба Δ_{N-1} входят в множество вершин кубов $\Delta^{N-2}_{i_1,\cdots,i_l}$.

В каждом кубе $\Delta^{N-2}_{i_1,\dots,i_l}$ полином $f_N(t_1, \dots, t_l; \Delta^{N-2}_{i_1,\dots,i_l})$ определяется формулой

$$f_N(t_1, \dots, t_l; \Delta^{N-2}_{i_1,\dots,i_l}) = P_{s,\dots,s}(\tilde{f}(t_1, \dots, t_l), \Delta^{N-2}_{i_1,\dots,i_l}),$$

где функция $\tilde{f}(t_1, \dots, t_l)$ равна $f(t_1, \dots, t_l)$ во всех точках интерполяции, за исключением точек, расположенных на гранях области Δ_{N-1}. В этих точках функция $\tilde{f}(t_1, \dots, t_l)$ полагается равной $P_{s,\dots,s}(f(t_1, \dots, t_l), \Delta_{N-1})$. Во всех областях Δ_i, $i \geq 0$, интерполяционные полиномы строятся аналогично. Локальный сплайн, составленный из этих полиномов, обозначим через $f_N(t_1, \dots, t_l)$.

Оценим норму $\|f(t) - f_N(t)\|_{C(\Delta^k_{i_1,\dots,i_l})}$ при $1 \leq k \leq N-1$.

Легко видеть, что при $1 \leq k \leq N-1$

$$\|f(t) - f_N(t)\|_{C(\Delta^k_{i_1,\dots,i_l})} \leq AN^{-s}(\ln N)^{u-1}. \tag{3.11}$$

Действительно,

$$\|f(t) - f_N(t)\|_{C(\Delta^k_{i_1,\dots,i_l})} \leq Bh_k^s \frac{M|\ln(\frac{k}{N})^v|^{u-1}}{((k/N)^v)^\gamma} \leq$$

$$\leq Bh_k^s \left(\frac{N}{k}\right)^{v\gamma} (\ln N)^{u-1} = \frac{B}{N^s}(\ln N)^{u-1}.$$

Рассмотрим случай, когда $k = 0$. Ограничимся рассмотрением куба $\Delta^0_{0,\dots,0} = [-1, t_1; -1, t_1; \dots; -1, t_1]$, где $t_1 = -1 + \left(\frac{1}{N}\right)^v$.

Используя формулу Тейлора (3.6) с остаточным членом в интегральной форме, имеем:

$$\|f(t) - f_N(t)\|_{C(\Delta^0_{0,\dots,0})} \leq B\lambda_r^l E_{r-1,\dots,r-1}(f, \Delta^0_{0,\dots,0}) \leq$$

$$\leq \max_{t \in \Delta^0_{0,\dots,0}} \left| \sum_{|k|=r} \frac{B}{k!} \int\limits_0^1 (1-\tau)^{r-1}(t_k+1)^k (1 + |\ln^u d(-1 + \tau(t_k+1)), \Gamma)|) d\tau \right| \leq$$

$$\leq B \max_{t\in\Delta^0_{0,\ldots,0}} |\sum_{|k|=r} \frac{1}{k!}\int\limits_0^1 (1-\tau)^{r-1}(t_k+1)^k |\ln^u \tau(t_k+1)| d\tau| \leq Bh_0^r |\ln h_0| \leq$$

$$\leq Bh_0^r |\ln^u h_0| \leq B\frac{\ln^u N}{N^s}.$$

Итак, доказано следующее утверждение.

Теорема 3.11. Пусть $\Omega = [-1,1]^l$, $l \geq 2$, $v = s/(s-\gamma), v > l/(l-1)$. Справедлива следующая оценка:

$$d_n(\bar{Q}^u_{r\gamma}(\Omega, M)) \leq B\frac{\ln^u n}{n^{(s-\gamma)/(l-1)}}.$$

Из результатов теорем 3.3, 3.4 и леммы 2.1 главы 1 вытекает следующее утверждение.

Теорема 3.12. Пусть $\Omega = [-1,1]^l$, $l \geq 2$, $v = s/(s-\gamma), v > l/(l-1)$. Справедливы следующие оценки:

$$\frac{A}{n^{(s-\gamma)/(l-1)}} \leq \delta_n(\bar{Q}^1_{r\gamma}(\Omega, M)) \asymp d_n(\bar{Q}^1_{r\gamma}(\Omega, M), C) \leq \frac{B\ln n}{n^{(s-\gamma)/(l-1)}}.$$

Перейдем к вычислению поперечников $\bar{Q}^u_{r,\gamma}(\Omega, M), v = s/(s-\gamma)u, v \leq \leq l/(l-1)$ при $u \geq 2$.

Теорема 3.13. Пусть $\Omega = [-1,1]^l$, $l \geq 2$, $2 \leq u$, $v = s/(s-\gamma)$. Справедливы оценки

$$\delta_n(\bar{Q}^u_{r\gamma}(\Omega, M)) \asymp d_n(\bar{Q}^u_{r\gamma}(\Omega, M), C) \asymp \left(\frac{1}{n}\right)^{s/l}, v < l/(l-1),$$

$$d_n(\bar{Q}^u_{r\gamma}(\Omega, M), C) \leq B\left(\frac{\ln n}{n}\right)^{s/l} (\ln n)^{u-1}, v = l/(l-1), ul/r \leq 1.$$

Доказательство. Как и в случае, когда $u = 1$, покроем куб Ω более мелкими кубами $\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l}$, $k = 0, 1, \ldots, N-1$.

Введем числа

$$M_0 = [(\ln N)^{u/r}], \quad M_k = [(\ln\frac{N}{k})^{(u-1)/s}], \quad k = 1, 2, \ldots, N-1.$$

В случае, если при некоторых значениях k $\ln\frac{N}{k} \leq 1$, то соответствующее число M_k полагаем равным 1. Каждую из сторон куба $\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l}$, $k = 0, 1, \ldots, N-1$ делим на M_k равных частей и через точки деления проводим плоскости, параллельные координатным плоскостям.

В результате каждый куб $\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l}$, $k=0,1,\ldots,N-1$, оказывается покрытым M_k^l более мелкими кубами, которые обозначим через $\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l;j_1,\ldots,j_l}$, $k=0,1,\ldots,N-1$. В каждом кубе $\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l;j_1,\ldots,j_l}$, $k=0,1,\ldots,N-1$ функцию $f(t)$ будем аппроксимировать интерполяционным полиномом $P_{s,\ldots,s}(f,\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l;j_1,\ldots,j_l})$, построение которого описано выше.

Сплайн, составленный их этих полиномов, обозначим через $f_N(t)$.

Оценим точность аппроксимации функции $f(t)\in\bar{Q}^u_{r,\gamma}(\Omega,M)$ сплайном $f_N(t)$.

Пусть $1\le k\le N-1$. Тогда,

$$\|f(t)-P_{s,\ldots,s}(f,\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l;j_1,\ldots,j_l})\|\le$$

$$\le B\left(\left(\left(\frac{k+1}{N}\right)^v-\left(\frac{k}{N}\right)^v\right)\frac{1}{(\ln\frac{N}{k})^{(u-1)/s}}\right)^s\frac{(1+|\ln(\frac{k}{N})^v|)^{u-1}}{\left(\frac{k}{N}\right)^{v\gamma}}\le$$

$$\le B\left(\left(\frac{k+1}{N}\right)^v-\left(\frac{k}{N}\right)^v\right)^s\left(\frac{N}{k}\right)^{v\gamma}\le\frac{B}{N^s}. \qquad (3.12)$$

При $k=0$ имеем оценку

$$\|f(t)-P_{s,\ldots,s}(f,\Delta^0_{i_1,\ldots,i_l;j_1,\ldots,j_l})\|\le$$

$$\le BE_{r-1,\ldots,r-1}(f,\Delta^0_{i_1,\ldots,i_l;j_1,\ldots,j_l})\lambda_s^l.$$

Как и выше, для оценки $E_{r-1,\ldots,r-1}(f,\Delta^0_{i_1,\ldots,i_l;j_1,\ldots,j_l})$ воспользуемся формулой Тейлора с остаточным членом в интегральной форме.

В результате имеем

$$E_{r-1,\ldots,r-1}(f,\Delta^0_{i_1,\ldots,i_l;j_1,\ldots,j_l})\le$$

$$\le Bh_{00}^r\int\limits_0^1(1-\tau)^{r-1}M(1+|\ln^u(\tau h_{00})|)d\tau\le$$

$$\le Bh_{00}^r\ln^u h_{00}\le B\left(\frac{1}{N}\right)^{vr}=B\left(\frac{1}{N}\right)^s,$$

где $h_{00}=h_0/M_0$, $\;h_0=\left(\frac{1}{N}\right)^v$.

Следовательно,

$$\|f(t)-P_{s,\ldots,s}(f,\Delta^0_{i_1,\ldots,i_l;j_1,\ldots,j_l})\|\le B\left(\frac{1}{N}\right)^s. \qquad (3.13)$$

Собирая оценки (3.12) – (3.13), имеем:

$$\|f(t) - f_N(t)\| \leq B\left(\frac{1}{N}\right)^s. \tag{3.14}$$

Оценим число узлов, используемых при построении локального сплайна $f_N(t)$.

Вначале оценим случай, когда $v < l(l-1)$.

Оценка сверху следует из цепочки неравенств:

$$n \leq m\sum_{k=1}^{N-1}\left(\frac{2-2(\frac{k}{N})^v}{(\frac{k+1}{N})^v - (\frac{k}{N})^v}\right)^{l-1} M_k^l + mN^{v(l-1)}[\ln N]^{lu/r} \leq$$

$$\leq BN^{v(l-1)}(\ln N)^{lu/r} + \sum_{k=1}^{N-1}\left(\frac{2N^v - 2k^v}{v(k+\theta)^{v-1}}\right)^{l-1}\left(1+\left(\ln\frac{N}{k}\right)^{\frac{u-1}{s}}\right)^l \leq$$

$$\leq BN^{v(l-1)}(\ln N)^{lu/r} + B\sum_{k=1}^{N-1}\frac{N^{v(l-1)}}{k^{(v-1)(l-1)}}\left(\left(\ln\frac{N}{k}\right)^{\frac{(u-1)l}{s}}+1\right),$$

где $m-$ число граней куба Ω.

Предположим вначале, что $(u-1)l \leq s$.

Тогда

$$n \leq BN^{v(l-1)}(\ln N)^{lu/r} + BN^{v(l-1)}\sum_{k=1}^{N-1}\frac{1}{k^{(v-1)(l-1)}}\left(\ln\frac{N}{k}+1\right) \leq$$

$$\leq BN^l + BN^{v(l-1)}\sum_{k=1}^{N-1}\frac{1}{k^{(v-1)(l-1)}}\ln\frac{N}{k} =$$

$$= BN^l + BN^{v(l-1)}\frac{1}{N^{(v-1)(l-1)}}\sum_{k=1}^{N-1}\left(\frac{N}{k}\right)^{(v-1)(l-1)}\ln\frac{N}{k}.$$

Оценим сумму

$$\sum_{k=1}^{N-1}\left(\frac{N}{k}\right)^{(v-1)(l-1)}\ln\frac{N}{k}.$$

Очевидно, $(v-1)(l-1) > 0$ и может принимать значения, меньшие 1, равные 1 и большие 1. Исследуемому случаю отвечает
$(v-1)(l-1) < 1:$

$$\sum_{k=1}^{N-1}\left(\frac{N}{k}\right)^{(v-1)(l-1)}\ln\frac{N}{k} \leq N^{(v-1)(l-1)}\ln N +$$

$$+\sum_{k=2}^{N-1}\left(\frac{N}{k}\right)^{(v-1)(l-1)}\ln\frac{N}{k}\le N^{(v-1)(l-1)}\ln N+\int\limits_1^N\left(\frac{N}{x}\right)^{(v-1)(l-1)}\ln\frac{N}{x}dx=$$

$$=N^{(v-1)(l-1)}\ln N+N\int\limits_1^N y^{(v-1)(l-1)-2}\ln y dy=BN^{(v-1)(l-1)}\ln N.$$

Следовательно, $n\le BN^l+BN^{v(l-1)}\ln N=BN^l$.

Таким образом, $n\le BN^l$.

Рассмотрим теперь более общий случай, когда $(u-1)l>s$. Введем обозначение $q=[(u-1)l/s]+1$. В этом случае

$$n\le BN^{v(l-1)}(\ln N)^{lu/r}+B\sum_{k=1}^{N-1}\frac{N^{v(l-1)}}{k^{(v-1)(l-1)}}\left(1+\ln^q\frac{N}{k}\right)\le$$

$$\le BN^l+B\sum_{k=1}^{N-1}\frac{N^{v(l-1)}}{k^{(v-1)(l-1)}}\ln^q\frac{N}{k}.$$

Оценим последнюю сумму. Очевидно,

$$\sum_{k=1}^{N-1}\frac{N^{v(l-1)}}{k^{(v-1)(l-1)}}\ln^q\frac{N}{k}=$$

$$=\frac{N^{v(l-1)}}{N^{(v-1)(l-1)}}\sum_{k=1}^{N-1}\left(\frac{N}{k}\right)^{(v-1)(l-1)}\ln^q\frac{N}{k}.$$

Здесь нужно рассмотреть случай $(v-1)(l-1)<1$.

Очевидно,

$$\sum_{k=1}^{N-1}\left(\frac{N}{k}\right)^{(v-1)(l-1)}\ln^q\frac{N}{k}\le N^{(v-1)(l-1)}\ln^q N+$$

$$+\int\limits_1^N\left(\frac{N}{x}\right)^{(v-1)(l-1)}\ln^q\frac{N}{x}dx\le N^{(v-1)(l-1)}\ln^q N+$$

$$+\frac{N^{(v-1)(l-1)}\ln^q N}{(v-1)(l-1)-1}+O(N^{(v-1)(l-1)}\ln^{q-1}N).$$

Следовательно, в этом случае

$$n\le BN^l+\frac{N^{v(l-1)}}{N^{(v-1)(l-1)}}\sum_{k=1}^{N-1}\left(\frac{N}{k}\right)^{(v-1)(l-1)}\ln^q\frac{N}{k}\le BN^l.$$

Таким образом, в обоих случаях

$$n \leq BN^l. \tag{3.15}$$

Из оценок (3.14), (3.15) следует, что $d_n(\bar{Q}^u_{r,\gamma}(\Omega, M)) \leq Bn^{s/l}$. Из сопоставления этой оценки с оценкой снизу поперечника Бабенко следует справедливость первой части теоремы.

Рассмотрим теперь случай, когда $v = l/(l-1)$.

Как и в случае, когда $v < l/(l-1)$, оценка сверху числа кубов, покрывающих область Ω, следует из цепочки неравенств

$$n \leq m \sum_{k=1}^{N-1} \left(\frac{2 - 2(\frac{k}{N})^v}{(\frac{k+1}{N})^v - (\frac{k}{N})^v} \right)^{l-1} M_k^l + mN^{v(l-1)} [\ln N]^{lu/r} \leq$$

$$\leq BN^l \ln N + B \sum_{k=1}^{N-1} \left(\frac{N^v}{k^{v-1}} \right)^{l-1} \left[\ln \frac{N}{k} \right]^{(u-1)l/s} \leq$$

$$\leq BN^l \ln N + \frac{BN^l}{N^{(v-1)(l-1)}} \sum_{k=1}^{N-1} \frac{N^{(v-1)(l-1)}}{k^{(v-1)(l-1)}} \left(\ln \frac{N}{k} \right)^{(u-1)l/s} =$$

$$= BN^l \ln N + BN^{l-1} \int_1^N \frac{N}{x} \left(\ln \frac{N}{x} \right)^{(u-1)l/s} dx \leq BN^l (\ln N)^{((u-1)l/s)+1}.$$

Следовательно,

$$n \leq BN^l (\ln N)^{(u-1)l/s+1}. \tag{3.16}$$

Из оценок (3.14), (3.16) следует, что

$$\|f(t) - f_N(t)\| \leq B \left(\frac{1}{n} \right)^{s/l} (\ln n)^{u-1+s/l},$$

где $n-$ число узлов локального сплайна.

Из этого неравенства следует справедливость второй части теоремы.

Теорема доказана.

Перейдем к вычислению поперечников $Q^u_{r,\gamma}(\Omega, M)$.

Теорема 3.14. Пусть $\Omega = [-1, 1]^l$, $l \geq 2$, $u = 1, 2, \cdots$, $v = s/(s-\gamma)$. Справедливы следующие оценки:

$$\delta_n(Q^u_{r\gamma}(\Omega, M)) \geq$$

$$\geq \begin{cases} n^{-s/l}, & v < l/(l-1), \\ (\ln n/n)^{s/l}, & v = l/(l-1). \end{cases}$$

Доказательство. Доказательство теоремы подобно доказательству теоремы 3.8 и поэтому опускается.

Перейдем к вычислению поперечников Колмогорова $d_n(Q^u_{r,\gamma}(\Omega, M), C)$ при $u = 1, 2, \cdots,$. Из определения 3.2 главы 1 следует, что для данного класса функций $\gamma = s - r - 1 + \mu$.

Теорема 3.15. Пусть $\Omega = [-1, 1]^l$, $l \geq 2$, $1 \leq u$, $v = s/(s - \gamma)$. Справедливы оценки

$$\delta_n(Q^u_{r\gamma}(\Omega, M)) \asymp d_n(Q^u_{r\gamma}(\Omega, M), C) \asymp \left(\frac{1}{n}\right)^{s/l},$$

если $v < l/(l - 1)$;

$$d_n(Q^u_{r,\gamma}(\Omega, M) \leq B \frac{(\ln n)^{us/r}}{n^{s/l}}$$

при $lu/r \geq ul/s + 1$;

$$d_n(Q^u_{r,\gamma}(\Omega, M) \leq B \frac{(\ln n)^{(ul+s)/l}}{n^{s/l}}$$

при $lu/r < ul/s + 1$, если $v = l/(l - 1)$.

Доказательство. Покроем куб Ω более мелкими кубами $\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l}$, $k = 0, 1, \ldots, N-1$, построение которых неоднократно описывалось выше.

Введем числа $M_0 = [(\ln N)^{u/(r+1-\mu)}]$, $M_k = [(\ln \frac{N}{k})^{u/s}]$, $k = 1, 2, \ldots,$ $N - 1$.

В случае, если при некоторых значениях k $\ln \frac{N}{k} \leq 1$, то соответствующее число M_k полагаем равным 1. Каждую из сторон куба $\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l}$, $k = 0, 1, \ldots, N - 1$, делим на M_k равных частей и через точки деления проводим плоскости, параллельные координатным плоскостям.

В результате каждый куб $\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l}$, $k = 0, 1, \ldots, N - 1$, оказывается покрытым M^l_k более мелкими кубами, которые обозначим через $\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l;j_1,\ldots,j_l}$, $k = 0, 1, \ldots, N - 1$. В каждом кубе $\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l;j_1,\ldots,j_l}$, $k = 0, 1, \ldots, N - 1$ функцию $f(t)$ будем аппроксимировать интерполяционным полиномом $P_{s,\ldots,s}(f, \Delta^k_{i_1,\ldots,i_l;j_1,\ldots,j_l})$, построение которого описано выше.

Сплайн, составленный их этих полиномов, обозначим через $f_N(t)$.

Оценим точность аппроксимации функции $f(t) \in Q^u_{r,\gamma}(\Omega, M)$ сплайном $f_N(t)$.

Пусть $1 \leq k \leq N - 1$. Тогда

$$\|f(t) - P_{s,\ldots,s}(f, \Delta^k_{i_1,\ldots,i_l;j_1,\ldots,j_l})\| \leq$$

$$\leq B\left(\left(\left(\frac{k+1}{N}\right)^v-\left(\frac{k}{N}\right)^v\right)\frac{1}{(\ln\frac{N}{k})^{u/s}}\right)^s\frac{(1+|\ln(\frac{k}{N})^v|)^u}{\left(\frac{k}{N}\right)^{v\gamma}}\leq$$

$$\leq B\left(\left(\frac{k+1}{N}\right)^v-\left(\frac{k}{N}\right)^v\right)^s\left(\frac{N}{k}\right)^{v\gamma}\leq\frac{B}{N^s}. \qquad (3.17)$$

При $k=0$ имеем оценку

$$\|f(t)-P_{s,\ldots,s}(f,\Delta^0_{i_1,\ldots,i_l;j_1,\ldots,j_l})\|\leq$$

$$\leq BE_{r,\ldots,r}(f,\Delta^0_{i_1,\ldots,i_l;j_1,\ldots,j_l})\lambda^l_s.$$

Как и выше, для оценки $E_{r,\ldots,r}(f,\Delta^0_{i_1,\ldots,i_l;j_1,\ldots,j_l})$ воспользуемся формулой Тейлора с остаточным членом в интегральной форме.

В результате имеем

$$E_{r,\ldots,r}(f,\Delta^0_{i_1,\ldots,i_l;j_1,\ldots,j_l})\leq$$

$$\leq Bh_{00}^{r+1-\mu}\int\limits_0^1(1-\tau)^{r-1}M(1+|\ln^u(\tau h_{00})|)d\tau\leq$$

$$\leq Bh_{00}^{r+1-\mu}\ln^u h_{00}\leq B\left(\frac{1}{N}\right)^{v(r+1-\mu)}=B\left(\frac{1}{N}\right)^s,$$

где $h_{00}=\frac{h_0}{M_0},\quad h_0=\left(\frac{1}{N}\right)^v.$

Следовательно,

$$\|f(t)-P_{s,\ldots,s}(f,\Delta^0_{i_1,\ldots,i_l;j_1,\ldots,j_l})\|\leq B\left(\frac{1}{N}\right)^s. \qquad (3.18)$$

Собирая оценки (3.17) – (3.18), имеем:

$$\|f(t)-f_N(t)\|\leq B\left(\frac{1}{N}\right)^s.$$

Оценим число узлов, используемых при построении локального сплайна $f_N(t)$.

Вначале оценим случай, когда $v<l(l-1)$.

Оценка сверху следует из цепочки неравенств:

$$n\leq m\sum_{k=1}^{N-1}\left(\frac{2-2(\frac{k}{N})^v}{(\frac{k+1}{N})^v-(\frac{k}{N})^v}\right)^{l-1}M^l_k+mN^{v(l-1)}[\ln N]^{lu/(r+1-\mu)}\leq$$

$$\leq BN^{v(l-1)}(\ln N)^{lu/(r+1-\mu)} + \sum_{k=1}^{N-1}\left(\frac{2N^v - 2k^v}{v(k+\theta)^{v-1}}\right)^{l-1}\left(1+\left(\ln\frac{N}{k}\right)^{\frac{u}{s}}\right)^l \leq$$

$$\leq BN^{v(l-1)}(\ln N)^{lu/(r+1-\mu)} + B\sum_{k=1}^{N-1}\frac{N^{v(l-1)}}{k^{(v-1)(l-1)}}\left(\left(\ln\frac{N}{k}\right)^{\frac{ul}{s}}+1\right),$$

где $m-$ число граней куба $\Delta^k_{i_1,\cdots,i_l}$.

Предположим вначале, что $ul \leq s$.

Тогда

$$n \leq BN^{v(l-1)}(\ln N)^{lu/(r+1-\mu)} + BN^{v(l-1)}\sum_{k=1}^{N-1}\frac{1}{k^{(v-1)(l-1)}}\left(\ln\frac{N}{k}+1\right) \leq$$

$$\leq BN^l + BN^{v(l-1)}\sum_{k=1}^{N-1}\frac{1}{k^{(v-1)(l-1)}}\ln\frac{N}{k} =$$

$$= BN^l + BN^{v(l-1)}\frac{1}{N^{(v-1)(l-1)}}\sum_{k=1}^{N-1}\left(\frac{N}{k}\right)^{(v-1)(l-1)}\ln\frac{N}{k} \leq BN^l. \qquad (3.19)$$

Рассмотрим теперь более общий случай, когда $ul > s$. Введем обозначение $q = [ul/s] + 1$. В этом случае

$$n \leq BN^{v(l-1)}(\ln N)^{lu/(r+1-\mu)} + B\sum_{k=1}^{N-1}\frac{N^{v(l-1)}}{k^{(v-1)(l-1)}}\left(1+\ln^q\frac{N}{k}\right) \leq$$

$$\leq BN^l + B\sum_{k=1}^{N-1}\frac{N^{v(l-1)}}{k^{(v-1)(l-1)}}\ln^q\frac{N}{k}.$$

Оценим последнюю сумму. Очевидно,

$$\sum_{k=1}^{N-1}\frac{N^{v(l-1)}}{k^{(v-1)(l-1)}}\ln^q\frac{N}{k} =$$

$$= \frac{N^{v(l-1)}}{N^{(v-1)(l-1)}}\sum_{k=1}^{N-1}\left(\frac{N}{k}\right)^{(v-1)(l-1)}\ln^q\frac{N}{k} <$$

$$< B\frac{N^{v(l-1)}}{N^{(v-1)(l-1)}}\int_1^N\left(\frac{N}{x}\right)^{(v-1)(l-1)}\ln^q\frac{N}{x}dx = BN^{v(l-1)}\ln^q N.$$

Следовательно,

$$n \leq BN^l. \qquad (3.20)$$

Из оценок (3.18) – (3.20) следует, что $\|f(t) - f_N(t)\| \leq Bn^{-s/l}$, где $n-$ число узлов локального сплайна.

Из этого неравенства, леммы 2.1 из главы 1 и теоремы 3.14 следует справедливость первой части теоремы.

Рассмотрим теперь случай, когда $v = l/(l-1)$.

Как и в случае, когда $v < l/(l-1)$, оценка сверху числа кубов, покрывающих область Ω, следует из цепочки неравенств

$$n \le m \sum_{k=1}^{N-1} \left(\frac{2 - 2(\frac{k}{N})^v}{(\frac{k+1}{N})^v - (\frac{k}{N})^v} \right)^{l-1} M_k^l + mN^{v(l-1)}[\ln N]^{lu/r} \le$$

$$\le BN^l (\ln N)^{lu/r} + B \sum_{k=1}^{N-1} \left(\frac{N^v}{k^{v-1}} \right)^{l-1} \left[\ln \frac{N}{k} \right]^{ul/s} \le$$

$$\le BN^l (\ln N)^{lu/r} + \frac{BN^l}{N^{(v-1)(l-1)}} \sum_{k=1}^{N-1} \frac{N^{(v-1)(l-1)}}{k^{(v-1)(l-1)}} \left(\ln \frac{N}{k} \right)^{ul/s} =$$

$$= BN^l (\ln N)^{lu/r} + BN^{l-1} \sum_{k=1}^{N-1} \frac{N}{k} \left(\ln \frac{N}{k} \right)^{ul/s} =$$

$$= BN^l (\ln N)^{lu/r} + BN^{l-1} \int_1^N \frac{N}{x} \left(\ln \frac{N}{x} \right)^{ul/s} dx =$$

$$= BN^l (\ln N)^{lu/r} + BN^l \int_1^N \frac{1}{y} (\ln y)^{ul/s} dy \le$$

$$\le BN^l (\ln N)^{lu/r} + BN^l (\ln N)^{(ul/s)+1}.$$

Выразим N через n. Здесь нужно рассмотреть два случая: 1) $lu/r \ge$ $\ge ul/s + 1$; 2) $lu/r < ul/s + 1$. В первом случае $N \le n^{1/l}/(\ln n)^{u/r}$. Во втором случае $N \le n^{1/l}/(\ln n)^{(ul+s)/(sl)}$. Выше было показано, что

$$\|f(t) - f_N(t)\|_C \le BN^{-s},$$

где $f_N(t)$– непрерывный локальный сплайн. Таким образом, при $lu/r \ge$ $\ge ul/s + 1$,

$$d_n(Q_{r,\gamma}^u(\Omega, M)) \le B \frac{(\ln n)^{us/r}}{n^{s/l}},$$

а при $lu/r < ul/s + 1$

$$d_n(Q_{r,\gamma}^u(\Omega, M)) \le B \frac{(\ln n)^{(ul+s)/l}}{n^{s/l}}.$$

Теорема доказана.

Теорема 3.16. Пусть $\Omega = [-1,1]^l$, $l \geq 2$, $v = s/(s-\gamma), v > l/(l-1)$. Справедливы следующие оценки:

$$d_n(Q^u_{r\gamma}(\Omega, M)) \leq B\frac{\ln^u n}{n^{(s-\gamma)/(l-1)}}.$$

Доказательство теоремы подобно доказательству теоремы 3.11.

В главе 2 была исследована гладкость сопряженных функций, представимых гиперсингулярными интегралами вида

$$\tilde{\varphi}(t_1, t_2) = \int\int\limits_{\Omega} \frac{\varphi(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2}{((\tau_1 - t_1)^2 + (\tau_2 - t_2)^2)^{p/2}}, \tag{3.21}$$

где $\Omega = [-1,1]^2$, в предположении, что функции $\varphi(t_1, t_2)$ принадлежат классам функций $W^{r,s}(M)$, $C^r_2(M), \hat{W}^{r,s}_q(M), C^r_{2,q}(M)$.

Было показано, что при этих предположениях сопряженные функции принадлежат классам функций $Q_{r,\gamma}(\Omega, M_1), \overline{Q}^u_{r,\gamma}(\Omega, M_1)$, $Q^u_{r,\gamma}(\Omega, M)$, $L_{0,s,\gamma}(\Omega, M)$, $\overline{L}_{0,s,\gamma}(\Omega, M)$.

В данном разделе вычислены поперечники Бабенко и Колмогорова классов функций $Q_{r,\gamma}(\Omega, M)$, $Q^u_{r,\gamma}(\Omega, M)$, $\overline{Q}^u_{r,\gamma}(\Omega, M)$ и, таким образом, вычислены поперечники Бабенко и Колмогорова сопряженных функций, представимых интегралами (3.21).

Аппроксимация функций, принадлежащих классам $L_{0,s,\gamma}(\Omega, M)$ и $\overline{L}_{0,s,\gamma}(\Omega, M)$, в метрике пространства $C(\Omega)$ невозможна, так как на границе области при любом способе аппроксимации погрешность в пространстве $C(\Omega)$ равна бесконечности.

Возможна аппроксимация функций из классов $L_{0,s,\gamma}(\Omega, M)$, $\overline{L}_{0,s,\gamma}(\Omega, M)$ в метрике пространства $L_p(\Omega)$ при $p < 1/\gamma$. Эти вопросы в данной работе не рассматриваются.

4. Оптимальные методы восстановления одномерных сопряженных функций

В данном разделе исследуются оптимальные методы восстановления сопряженных функций, представимых гиперсингулярными интегралами

$$\tilde{\varphi}(t) = \int\limits_{-1}^{1} \frac{\varphi(\tau)}{(\tau - t)^p} d\tau, \ -1 < t < 1, \ p = 2, 3, \ldots. \tag{4.1}$$

в предположении, что функции $\varphi(t)$ принадлежат классам функций $W^s(M)$, $W^s_q(M)$.

Как отмечалось выше, в случае, если $\varphi(t) \in W^s(M)$, невозможно построить равномерную аппроксимацию функций $\tilde{\varphi}(t)$ при $t \in (-1, 1)$.

Поэтому рассмотрим случай, когда $\varphi(t) \in \hat{W}_q^s(M)$, при $q \geq p-1$. В этом случае $\tilde{\varphi}(t) \in \bar{Q}^1_{r,\gamma}(\Omega, M)$, где $r = q-p+1$, $\gamma = r-p+1$ при $p-1 \leq q \leq r-2$, $\tilde{\varphi}(t) \in W^{r-p}H_\alpha(M)$ при $q = r-1$.

В рассматриваемом случае оптимальный метод восстановления сопряженных функций состоит из нескольких этапов.

Пусть функции $\varphi(t)$ принадлежат классу функции Ψ. Тогда сопряженные функции $\tilde{\varphi}(t)$ принадлежат классу функций, сопряженному с классом функций Ψ. Обозначим этот класс через $\tilde{\Psi}$.

На первом этапе определяются узлы локального сплайна, наилучшим образом аппроксимирующего сопряженные функции, принадлежащие классу функций $\tilde{\Psi}$.

На втором этапе по оптимальным квадратурным формулам, построенным в главе 3, вычисляются значения гиперсингулярных интегралов в узлах локальных сплайнов.

На третьем, заключительном этапе, по данным значениям гиперсингулярных интегралов строятся локальные сплайны, равномерно аппроксимирующие сопряженные функции в области Ω.

Погрешность аппроксимации сопряженных функций состоит из трех составляющих: погрешности оптимальных квадратурных формул на классе функций $W^s(M)$, погрешности аппроксимации сопряженных функций из класса $Q_{r,\gamma}(\Omega, M)$ локальными сплайнами и погрешности, вносимой неточным заданием значений сопряженных функций в узлах локального сплайна. Нетрудно видеть, что в случае $\varphi(t) \in \hat{W}_q^s(M)$, эта погрешность равна $O(N^{-s})$.

Так как возможность равномерного восстановления сопряженных функций возможна только в случае, если $\varphi(t) \in W_q^r(M)$, то возникает задача преобразования исходного гиперсингулярного интеграла.

Представим функцию $\varphi(t)$ в виде $\varphi(t) = \varphi_1(t) + \varphi_2(t)$, где $\varphi_2(t)-$ полином порядка $2(q+1)$, удовлетворяющий следующим условиям:

$$\varphi_2^{(v)}(\pm 1) = 0, \quad v = 0, 1, \dots, q.$$

Один из способов построения подобных полиномов заключается в следующем. Будем искать полином $\varphi_2(t)$ в виде $\varphi_2(t) = a_0 + a_1 t + \cdots +$

$+\, a_{2q+1}t^{2q+1}$, коэффициенты $\alpha_k, k = 0, 1, \ldots, 2q+1$, определяются из системы уравнений

$$
\begin{gathered}
a_0 + a_1 + \cdots + a_{2q+1} = \varphi(1), \\
a_0 - a_1 + \cdots + (-1)^{q+1} a_{2q+1} = \varphi(-1) \\
\cdots \\
q! a_{2q} + (q+1)! a_{2q+1} = \varphi^{(q)}(1), \\
q! a_{2q} - (q+1)! a_{2q+1} = \varphi^{(q)}(-1).
\end{gathered} \tag{4.2}
$$

Из вида системы (4.2) следует, что данная система имеет единственное решение.

Представим гиперсингулярный интеграл (4.1) в виде

$$
\tilde{\varphi}(t) = \int_{-1}^{1} \frac{\varphi_1(\tau)}{(\tau - t)^p} d\tau + \int_{-1}^{1} \frac{\varphi_2(\tau) d\tau}{(\tau - t)^p}.
$$

Последний интеграл легко вычисляется аналитически.

Функция $\varphi_1(t) \in \hat{W}_q^s(M)$ и, следовательно, функция

$$
\tilde{\varphi}_1(t) = \int_{-1}^{1} \frac{\varphi_1(\tau)}{(\tau - t)^p} d\tau
$$

принадлежат классу функций $Q_{r,\gamma}(\Omega, M)$ и для восстановления этой функции может быть использован описанный в начале раздела алгоритм.

5. Оптимальные методы восстановления сопряженных функций, представимых многомерными гиперсингулярными интегралами

В данном разделе исследуются оптимальные методы восстановления сопряженных функций, представимых гиперсингулярными интегралами вида

$$
\tilde{\varphi}(t_1, t_2) = \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} \frac{\varphi(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2}{((\tau_1 - t_1)^2 + (\tau_2 - t_2)^2)^{p/2}}, \quad \varphi(\tau_1, \tau_2) \in \Psi. \tag{5.1}
$$

В качестве класса функций Ψ в этом разделе берутся множества функций $W^{s_1,s_2}(M), \hat{W}_q^{s_1,s_2}(M)$, $C_2^s(M), C_{2,q}^s(M)$.

Двумерные гиперсингулярные интегралы рассматриваются только ради краткости обозначений и описания. Аналогичные результаты справедливы и для многомерных гиперсингулярных интегралов большей размерности. Оптимальные методы аппроксимации функций многих переменных с любой конечной размерностью рассмотрены в разделе 3 данной главы.

Множество функций $\tilde{\varphi}(t_1, t_2)$, являющихся образом множества функций Ψ при отображении (5.1), обозначим через $\tilde{\Psi}$.

Во второй главе была исследована гладкость сопряженных функций $\tilde{\varphi}(t_1, t_2)$ в предположении, что $\varphi(t_1, t_2) \in W^{s_1,s_2}(M), \hat{W}_q^{s_1,s_2}(M), C_2^s(M)$, $C_{2,q}^s(M)$.

Было показано, что при $\varphi \in W^{s_1,s_2}(M)$ и $\varphi \in C_2^s(M)$ функции $\tilde{\varphi}(t_1, t_2)$ принадлежат классу $L_{0,s,\gamma}(\Omega, M)$ и их равномерная аппроксимация в метрике пространства C невозможна.

В случае, если $\varphi(t_1, t_2) \in \hat{W}_q^{s_1,s_2}(M)$ или $\varphi(t_1, t_2) \in C_{2,q}^s(M)$, то, как показано в главе 2, функция $\tilde{\varphi}(t_1, t_2) \in Q_{r,\gamma}(\Omega, M)$. В этом случае возможна равномерная аппроксимация функций $\tilde{\varphi}(t_1, t_2)$ в области Ω.

Оптимальное восстановление сопряженных функций состоит из нескольких этапов.

Вначале определяются параметры r, γ класса функций $Q_{r,\gamma}(\Omega, M)$, к которому принадлежит сопряженная функция $\tilde{\varphi}(t_1, t_2)$. После того, как определен класс функций $Q_{r,\gamma}(\Omega, M)$, к которому принадлежат функции $\tilde{\varphi}(t_1, t_2)$, находятся узлы локального сплайна, осуществляющего наилучшую аппроксимацию функций из класса $Q_{r,\gamma}(\Omega, M)$. Взяв узлы локального сплайна в качестве параметров (t_1, t_2) по оптимальным кубатурным формулам, построенным в главе 5, вычисляются гиперсингулярные интегралы от функций $\varphi(t_1, t_2)$, принадлежащих соответственному классу функций Ψ. Затем по вычислительным значениям гиперсингулярных интегралов в узлах локальных сплайнов строятся уже сами локальные сплайны, которые являются оптимальным методом восстановления сопряженных функций, представимых гиперсингулярными интегралами (5.1) при $\varphi \in \Psi$, $\Psi \in C_{2,q}^s(M)$.

Остановимся на вопросе согласования числа узлов используемых кубатурной формулы и сплайна. Подобное согласование зависит от класса функций Ψ, к которому принадлежит интегрируемая функция φ.

Предположим, что $\varphi \in \Psi = C_{2,q}^s(1)$, $q \geq p - 1$.

В главе 5 было показано, что на этом классе функций величина погрешности равна $R_N[\Psi] \asymp N^{-(s+2-p)} \asymp n^{-(s+2-p)/2}$, где $n-$ число узлов кубатурной формулы.

В главе 2 было показано, что если $\varphi \in C^s_{2,q}(1)$, то функция $\tilde{\varphi} \in \tilde{\Psi}$, где $\tilde{\Psi} = Q_{r,\gamma}(\Omega, M)$ при $p-1 \leq q < r-1$ и $\Psi = C_2^{s-p+1}$ при $q = r-1$. Параметры r и γ зависят от величин p, q, s. Эта зависимость выражена теоремой 2.3 из главы 2. В случае, если $\tilde{\Psi} = Q_{r,\gamma}(\Omega, M)$, то погрешность локального сплайна, аппроксимирующего функцию $\tilde{\varphi}(t_1, t_2)$, определяется теоремой 3.2, а в случае $\tilde{\Psi} = \overline{Q}^1_{r,\gamma}(\Omega, M)-$ теоремой 3.12. Для $\varphi \in C^r_2(M)$ поперечники Бабенко и Колмогорова вычислены в [69].

Естественно потребовать, чтобы погрешность используемых в методе кубатурных формул и сплайнов была согласована с величиной ε, с которой требуется восстановить сопряженную функцию. Тогда число узлов кубатурной формулы определяется из равенства $\frac{\varepsilon}{2} = \lambda R_N[\Psi]$, а число узлов локального сплайна – из равенства $\frac{\varepsilon}{2} = \gamma(\tilde{\Psi}, C)$, где $\lambda-$ константа Лебега полиномов, используемых при построении локального сплайна; $\gamma(\tilde{\Psi}, C)-$ погрешность локальных сплайнов на классе функций $\tilde{\Psi}$ в метрике пространства C. Слагаемое $\lambda R_N[\Psi]$ возникает из-за того, что значения сопряженной функции $\widetilde{\psi}(t_1, t_2)$ заданы не точно, а вычислены по оптимальным кубатурным формулам, имеющим погрешность $R_N[\Psi]$.

Тогда полная погрешность аппроксимации сопряженной функции $\widetilde{\varphi}(t_1, t_2) \in \widetilde{\Psi}$ равна $\varepsilon = \gamma(\widetilde{\Psi}, C) + \lambda R_N[\Psi]$.

Заключение

В монографии изложены приближенные методы вычисления гиперсингулярных интегралов различных видов. Рассмотрены приближенные методы вычисления одномерных гиперсингулярных интегралов, полигиперсингулярных интегралов, многомерных гиперсингулярных интегралов.

Особое внимание уделяется построению оптимальных квадратурных и кубатурных формул вычисления гиперсингулярных интегралов. Для одномерных гиперсингулярных интегралов с фиксированными особенностями построены асимптотически оптимальные квадратурные формулы, для всех остальных расмотренных в книге видов гиперсингулярных интегралов – оптимальные по порядку квадратурные и кубатурные формулы. Исследован новый подход к вычислению гиперсингулярных интегралов, основанный на наилучшем по порядку алгоритму восстановления соответствующих сопряженных функций.

В любой книге имеются описки и упущения. Автор будет признателен, если о всех замеченных недостатках ему будет сообщено по адресу: 440026, Пенза, ул. Красная, 40, Пензенский государственный университет, кафедра высшей и прикладной математики.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Адамар, Ж. Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа / Ж. Адамар. – М. : Наука, 1978. – 351 с.

2. Адамар, Ж. Исследование психологии процесса изобретения в области математики / Ж. Адамар. – М. : Совет. радио. 1970. – 152 с.

3. Бабенко, К. И. О некоторых задачах теории приближений и численного анализа / К. И. Бабенко // Успехи математических наук. – 1985. – Т. 40. – Вып. 1. – С. 3 – 28.

4. Бахвалов, Н. С. О свойствах оптимальных методов решения задач математической физики / Н. С. Бахвалов // Журнал вычислит. матем. и матем. физики. – 1970. – Т. II. – № 3. – С. 555 – 568.

5. Белоцерковский, С. М. Тонкая несущая поверхность в дозвуковом потоке газа / С. М. Белоцерковский. – М. : Наука, 1965. – 244 с.

6. Белоцерковский, С. М. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях и их применение в аэродинамике, теории упругости, электродинамике / С. М. Белоцерковский, И. К. Лифанов. – М. : Наука, 1985. – 325 с.

7. Бисплингхофф, Р. Аэроупругость / Р. Бисплингхофф, Х. Эшли, Р. Халфмен. – М. : Иностр. лит., 1958. – 283 с.

8. Бойков, И. В. Приближенное решение интегральных уравнений Фредгольма с интегралом в смысле главного значения Коши–Адамара / И. В. Бойков // Функциональный анализ и теория функций. – Казань : Изд-во КГУ, 1970. – Вып. 7. – С. 3 – 23.

9. Бойков, И. В. Приближенное решение интегро - дифференциальных уравнений с интегралом в смысле Адамара / И. В. Бойков // Ученые записки ППИ. – Пенза, 1973. –Вып. 4. – С. 42 – 61.

10. Бойков, И. В. Оптимальные по точности алгоритмы вычисления сингулярных интегралов / И. В. Бойков. – Саратов : Изд-во Сарат. гос. ун-та, 1983. – 210 с.

11. Бойков, И. В. Пассивные и адаптивные алгоритмы вычисления сингулярных интегралов / И. В. Бойков. – Пенза : Изд-во ПГТУ, 1995.– Ч. 1. – 214 с.

12. Бойков И. В. Пассивные и адаптивные алгоритмы вычисления сингулярных интегралов / И. В. Бойков. – Ч. 2. – Пенза : Изд-во ПГТУ, 1995. – Ч. 2. – 128 с.

13. Бойков, И. В. Аппроксимация некоторых классов функций локальными сплайнами / И. В. Бойков // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1998. – Т. 38. – № 1. – С. 25 – 33.

14. Бойков, И. В. Приближенные методы вычисления сингулярных и гиперсингулярных интегралов. Ч. 1. Сингулярные интегралы / И. В. Бойков. – Пенза : Изд-во Пенз. гос. ун-та, 2005. – 360 с.

15. Бойков, И. В. Оптимальные методы приближения функций и вычисления интегралов / И. В. Бойков. – Пенза : Изд-во Пенз. гос. ун-та, 2007. – 236 с.

16. Бойков, И. В. Асимптотически оптимальные квадратурные формулы для вычисления интегралов Адамара с фиксированной особенностью / И. В. Бойков, Н. Ф. Добрынина // Применение вычислительных методов в научно-технических исследованиях : Межвуз. сб. науч. тр. – Пенза : Пенз. политехн. ин-т, 1984. – Вып. 6. – С. 11 – 24.

17. Бойков, И. В. Об оптимальных по точности алгоритмах вычисления интегралов Адамара / И. В. Бойков, Н. Ф. Добрынина // Оптимальные методы вычислений и их применение : Межвуз. сб. науч. тр. – Пенза : Пенз. политехн. ин-т, 1985. – Вып. 7. – С. 14 – 28.

18. Бойков, И. В. Эффективный метод вычисления двойных интегралов Адамара // И. В. Бойков, Н. Ф. Добрынина ; Пенз. политехн. ин-т. – Пенза, 1989. – 19 с. – Деп. в ВИНИТИ 10.5.89, № 3011 – В89.

19. Бойков, И. В. Об одном методе приближенного решения граничных интегральных уравнений / И. В. Бойков, Н. Ф. Добрынина // Эффективные численные методы решения краевых задач механики твердого деформируемого тела : тез. докл. респ. науч.-техн. конф., 27–29 сент. 1989 г. – Харьков, 1989. – С. 34 – 35.

20. Бойков, И. В. Весовые квадратурные формулы для интегралов Адамара / И. В. Бойков, Н. Ф. Добрынина ; Пенз. политехн. ин-т. – Пенза, 1989. – 7 с. – Деп. в ВИНИТИ 19.1.90, № 424 – В90.

21. Бойков, И. В. О приближенном решении интегральных уравнений с интегралами в смысле Адамара / И. В. Бойков, Н. Ф. Добрынина ; Пенз. политехн. ин-т. – Пенза, 1988. – 13 с. – Деп. в ВИНИТИ 14.10.88, № 7429 – В88.

22. Бойков, И. В. Приближенные методы вычисления интегралов Адамара : учеб. пособие / И. В. Бойков, Н. Ф. Добрынина – Пенза : Изд-во Пенз. гос. ун-та, 2007. – 108 с. Электронная библиотека системы федеральных образовательных порталов.

23. Бойков, И. В. Эффективный метод вычисления интегралов Адамара / И. В. Бойков, Н. Ф. Добрынина, Л. Н. Домнин ; Пенз. политехн. ин-т. – Пенза, 1988. – 13 с. – Деп. в ВИНИТИ 14.10.88, № 7249 – В88.

24. Бойков, И. В. Приближенные методы вычисления интегралов Адамара и решения гиперсингулярных интегральных уравнений / И. В. Бойков, Н. Ф. Добрынина, Л. Н. Домнин.– Пенза : Изд-во Пенз. гос. ун-та, 1996. – 188 с.

25. Бойков, И. В. Об одном способе регуляризации особых интегралов / И. В. Бойков, С. М. Зиновьева // Математическое и компьютерное моделирования естественно-научных и социальных проблем : 1 Междунар. н.-техн. конф., – Пенза, 2008. – С. 67 – 70.

26. Бойков, И. В. Оптимальные кубатурные формулы вычисления многомерных интегралов в смысле Адамара / И. В. Бойков, С. Я. Нагаева // Вопросы математического анализа : сб. науч. ст. – Красноярск : Изд-во Краснояр. гос. техн. ун-та, 1999. – Вып. 3. – С. 30 – 47.

27. Бойков, И. В. Асимптотические по точности алгоритмы вычисления интегралов Адамара с фиксированной особенностью / И. В. Бойков, С. Я. Нагаева // Технологии и системы обработки информации и управления : сб. науч. тр. Ч. 2. Пенза : Изд-во Пенз. гос. ун-та, 1999. – Вып. 3. – С. 28 – 51.

28. Бойков, И. В. Применение квадратурных формул Гаусса к приближенному вычислению сингулярных интегралов / И. В. Бойков, С. Я. Нагаева // Методы дискретных особенностей в задачах математической физики (МДОЗМФ 2000). – Тр. 9 Междунар. симп., посвященного 80-летию со дня рождения профессора С. М. Белоцерковского – Орел. – 29 мая – 2 июня 2000. – Орел, 2000. – С. 86 – 89.

29. Бойков, И. В. Приближенные методы вычисления гиперсингулярных интегралов с фиксированными особенностями / И. В. Бойков, Б. М. Стасюк, Д. В. Тарасов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. Математика. – 2008. – № 1. – С. 21 – 40.

30. Бойкова, А. И. Об одном классе интерполяционных полиномов / А. И. Бойкова // Оптимальные методы вычислений и их применение. – Пенза : ПГТУ, 1996. – С. 141 – 148.

31. Бойкова, А. И. Приближенные методы решения некоторых классов гиперсингулярных интегральных уравнений / А. И. Бойкова // Методы дискретных особенностей в задачах математической физики : тр. симп. – Орел, 2000. – С. 21 – 25.

32. Бойкова, А. И. Об одном приближенном методе вычисления трансформаций потенциальных полей / А. И. Бойкова // Известия РАН. Физика Земли. – 2004. – № 1. – С. 58 – 69.

33. Бойкова, А. И. Оптимальные методы вычисления трансформаций потенциальных полей / А. И. Бойкова // Известия РАН. Физика Земли. – 2008. – Т. 44. – № 4. – С. 83 – 92.

34. Вайникко, Г. М. Численные методы в гиперсингулярных интегральных уравнениях и их приложения / Г. М. Вайникко, И. К. Лифанов, Л. Н. Полтавский. – М : Янус-К, 2001. – 508 с.

35. Векуа, Н. П. Интегральные уравнения типа Фредгольма с интегралами в смысле Адамара / Н. П. Векуа // Тр. Тбилисск. мат. ин-та АН ГССР. – 1939. – Т. 7. – С. 325 – 336.

36. Вентцель, Э. С. Метод компенсирующих нагрузок в задачах теории тонких пластинок и оболочек / Э. С. Вентцель, К. Е. Джан-Темиров, А. М. Трофимов, Е. В. Негольша. – Харьков : Изд-во ХВВКИУРВ, 1992. – 91 с.

37. Воробьев, Н. Ф. Аэродинамика несущих поверхностей в установившемся потоке / Н. Ф. Воробьев. – Новосибирск : Наука, 1985. – 240 с.

38. Гандель, Ю. В. Математические вопросы метода дискретных токов / Ю. В. Гандель, С. В. Еременко, Т. С. Полякова. – Харьков : Изд-во Харьков. гос. ун-та, 1992.– Ч. 2.– 145 с.

39. Гахов, Ф. Д. Краевые задачи / Ф. Д. Гахов. – М. : Наука, 1977. – 640 с.

40. Гельфанд, И. М. Обобщенные функции и действия над ними / И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов. – М.: ГИФМЛ. – 1958. – Вып. 1. – 439 с.

41. Гук, В. М. Приближенный метод решения интегральных уравнений с интегралом Адамара / В. М. Гук, К. А. Новиков// Вестн. ЛПИ. – 1982. – № 169. – С. 29 – 31.

42. Гур-Мильнер, С. И. Новый метод дискретных особенностей для определения аэродинамических сил, действующих на тонкую несущую поверхность / С. И. Гур-Мильнер // Тр. ЛКИ, 1974. – Вып. 91. – С. 89 – 94.

43. Гур-Мильнер, С. И. Интерполяционно-квадратурная формула для вычисления сингулярного интеграла, встречающегося в теории несущей поверхности / С. И. Гур-Мильнер // Прикладная и вычислительная математика в судостроении // Тр. ЛКИ, 1981. – Вып. 92. – С. 78 – 86.

44. Гюнтер, Н. М. Теория потенциала и ее применение к основным задачам математической физики / Н. М. Гюнтер. – М. : ГИТТЛ, 1953.– 416 с.

45. Добрынина, Н. Ф. Оптимальные квадратурные формулы для вычисления интегралов Адамара / Н. Ф. Добрынина // Оптимальные методы вычислений и их применение : межвуз. сб. науч. тр. – Пенза : Пенз. политехн. ин-т, 1983. – Вып. 5. – С. 25 – 35.

46. Добрынина, Н. Ф. О вычислительных программных модулях для некоторых интегралов Адамара / Н. Ф. Добрынина, Л. Н. Домнин // Оптимальные методы вычислений и их применение : межвуз. сб. науч. тр. – Пенза : Пенз. политехн. ин-т, 1987. – Вып. 8. – С. 46 – 50.

47. Добрынина, Н. Ф. О приближенных методах вычисления интегралов Адамара / Н. Ф. Добрынина, Л. Н. Домнин // Оптимальные методы вычислений и их применение к обработке информации: межвуз. сб. науч. тр. – Пенза : Пенз. политехн. ин-т, 1990. – Вып. 9. – С. 24 – 29.

48. Захарова, Ю. Ф. Оптимальные весовые квадратурные формулы на числовой оси / Ю. Ф. Захарова // Стандартизация и качество : тр. Междунар. конф. – Пенза, 2001. – С. 210 – 213.

49. Захарова, Ю. Ф. Оптимальные весовые квадратурные формулы на числовой оси / Ю. Ф. Захарова // Кубатурные формулы и их приложения : тр. VI-го Междунар. семинара-совещания. – Уфа, 2001. – С. 58 – 62.

50. Захарова, Ю. Ф. Оптимальные весовые квадратурные формулы на числовой оси / Ю. Ф. Захарова // Вопросы математического анализа. – Красноярск, 2002. – Вып. 5. – С. 18 – 35.

51. Захарова, Ю. Ф. Приближенные методы вычисления многомерных сингулярных интегралов с фиксированной особенностью на числовой оси / Ю. Ф. Захарова // Тр. Междунар. конф. по вычислительной математике. – Новосибирск, 2002. – т. 1. – С. 182 – 188.

52. Иванов, В. В. Теория приближенных методов и ее применение к численному решению сингулярных интегральных уравнений / В. В. Иванов. – Киев : Наук. думка, 1968. – 288 с.

53. Крылов, В. И. Приближенные методы вычисления интегралов / В. И. Крылов. – М. : ГИФМЛ, 1959. – 327 с.

54. Линьков, А. М. Комплексный метод граничных интегральных уравнений теории упругости / А. М. Линьков. – СПб., 1999. – 382 с.

55. Линьков, А. М. Гиперсингулярные интегралы в плоских задачах теории упругости / А. М. Линьков, С. Г. Могилевская // ПММ. – 1990. – Т. 54. – № 1. – С. 116 – 127.

56. Лифанов, И. К. Численное решение сингулярных интегральных уравнений Гильберта с сильной особенностью / И. К. Лифанов // Оптимальные методы вычислений и их применение : межвуз. сб. науч. тр. – Пенза : Пенз. политехн. ин-т, 1985. – Вып. 7. – С. 38 – 45.

57. Лифанов, И. К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент / И. К. Лифанов. – М. : ТОО “Янус”, 1995. – 520 с.

58. Марчук, Г. И. Численные методы в теории переноса нейтронов / Г. И. Марчук, В. И. Лебедев. – М. : Атомиздат, 1971. – 496 с.

59. Михлин, С. Г. Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения / С. Г. Михлин. – М. : Физматгиз, 1962. – 254 с.

60. Моторный, В. П. О наилучшей квадратурной формуле вида $\sum\limits_{k=1}^{n} p_k f(x_k)$ для некоторых классов периодических дифференцируемых функций / В. П. Моторный // Изв. АН СССР. Математ. серия. – 1974. – № 3. – С. 583 – 614.

61. Мусхелешвили, Н. И. Сингулярные интегральные уравнения / Н. И. Мусхелишвили. – М. : Наука, 1968. – 511 с.

62. Назарчук, З. Т. Численное исследование дифракций на цилиндрических структурах / З. Т. Назарчук. – Киев : Наук. думка, 1989. – 256 с.

63. Натансон, И. П. Конструктивная теория функций / И. П. Натансон. – М. ; Л. : ГИФМЛ, 1949. – 688 с.

64. Некрасов, А. И. Теория крыла в нестационарном потоке / А. И. Некрасов. – М. : Изд-во АН СССР, 1947. – С. 3 – 65.

65. Никольский, С. М. Квадратурные формулы / С. М. Никольский. – М. : Наука, 1979. – 254 с.

66. Никольский, С. М. Курс математического анализа / С. М. Никольский. – М. : Наука, 1975. – Т. 1. – 432 с.

67. Прудников, А. Н. Интегралы и ряды / А. Н. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев. – М. : Наука, 1981. – 800 с.

68. Стечкин, С. Б. О наилучшем приближении сопряженных функций тригонометрическими полиномами / С. Б. Стечкин // Изв. АН СССР. Серия математическая. – 1956. – Т. 20. – С. 197 – 206.

69. Теоретические основы и конструирование численных алгоритмов задач математической физики / под ред. К. И. Бабенко. – М. : Наука, 1979. – 196 с.

70. Тиман, А. Ф. Теория приближений функций действительного переменного / А. Ф. Тиман.– М. : Физматгиз, 1960. – 624 с.

71. Чикин, Л. А. Особые случаи краевой задачи Римана и сингулярных интегральных уравнений / Л. А. Чикин // Уч. записки Казан. гос. ун-та. – 1953. – Т. 113. – Кн. 10. – С. 57 – 105.

72. Эшли, Х. Аэродинамика крыльев и корпусов летательных аппаратов / Х. Эшли, М. Лэндал. – М. : Машиностроение, 1969. – 129 с.

73. Bialecki, B. A Sinc Quadrature Rule for Hadamard Finite-Part Integrals / B. A. Bialecki // Numer. Math., 1990. – V. 57. – P. 263 – 269.

74. Bleistein, N. Asymptotic expansions of integrals / N. Bleistein, R. A. Handelsman. – New York. Holt. Renihart and Winston, 1975. – 340 p.

75. Boikov, I. V. Numerical methods of computation of singular and hypersingular integrals / I. V. Boikov // International Journal of Mathematics and Mathema-tical Sciences, 2001. – V. 28. – № 3. – P. 127 – 179.

76. Boykov, I. V. Fundamental Solutions for Thick Sandwich Plate / I. V. Boykov, A. I. Boykova, E. S. Ventsel // Engineering Analisis and Boundary Elements. – 2004. – V. 28. – P. 1437 – 1444.

77. Boykov, I. V. An approximation methods for evaluating hypersingular integrals / I. V. Boykov, A. I. Boykova, E. S. Ventsel // Engineering Analysis with Boundary Elements. – 2006. – V. 30. – P. 799 – 807.

78. Boykov, I. V. Accuracy optimal methods for evaluating hypersingular integrals / I. V. Boykov, E. S. Ventsel, A. I. Boykova // Applied Numerical Mathematics, 2009. – V. 59. – № 6. – P. 1366 – 1385.

79. Boikova, A. I. Methods for approximate calculation of the Hadamard integrals and solution of integral equations with Hadamard integrals / A. I. Boikova // C. Constanda, J. Saranen and S. Siekkala (editors) Integral methods in science and engineering. Volume two: approximate methods. Addison Wesley Longman Limited, 1997. – P. 59 – 63.

80. Boikova, A. I. An Oder One Approximate Method of Solution of Differential and Integral Equations / A. I. Boikova // B. Bertram, C. Constanda, S. Struchers (editors) Integral methods in science and engineering. Research Notes in Mathematics. V. 418 . CRC PRESS. – London. – 2000. – P. 73 – 78.

81. Brab, H. Quadraturverfahren Vandenboeck / H. Brab. – Ruprecht. – Gottingen, 1977. – 320 p.

82. Brebbia, C. A. Boundary Element Techniques / C. A. Brebbia, J. C. I. Telles, L. C. Wrobel . – Berlin : Springer, 1984. – 320 p.

83. Bruning, J. Regular singular asymptotics / J. Bruning, R. Seeley // Adv. Math. – 1985. – V. 58. – P. 133 – 148.

84. Bureau, F.G. Problems and methods in partial differential equations, Part III (Finite part and logarithmic part of some divergent integrals with applications to the Cauchy problem) / F. G. Bureau . – Duke lectures, 1955 – 1956. – 152 p.

85. Criscuolo, G. A new algorithm for Cauchy principal value and Hadamard finite-part integrals / G. Criscuolo // Journal of Computational and Applied Mathematics. 1997. – V. 78. – P. 255 – 275.

86. Criscuolo, G. On the convergence of product formulas for the nunerical evaluation of derivatives of Cauchy principal value integrals / G. Criscuolo, G. Mastroianni // SIAM Jornal of Numerical Analisis. 1988. – V. 25. – P. 713 – 727.

87. Diethelm, K. Error Bounds for Compound Quadratures for Hadamard-Type Finite Part Integrals / K. Diethelm // In the book G. Alefeld, J. Hereberger (editors) "Numerical Methods and Error Bounds" Academia-Verlag. – Berlin, 1996. – P. 17 – 28.

88. Diethelm, K. Generalized compound quadrature formulae for finite-part integrals / K. Diethelm // IMA Journal of Numerical Analysis. – 1997. – V. 17. – P. 479 – 493.

89. Elliot, D. Sigmodal transformations and the Eular – Maclairin expansion for evaluating certain Hadamard finite-part integrals / D. Elliot, E. Venturino // Numerische Mathematik. – 1997. – V. 77. – P. 453 – 465.

90. Gaier, D. Konstruktive Methoden der Konformen Abbildung / D. Gaier. – Berlin – Heidelberd : Springer, 1964. – 294 p.

91. Hadamard, J. Lecons sur la Propagation des Ondes et les Equations de l'Hydrodynamique. Herman / J. Hadamard . – Paris. 1903. 320 p. (reprinted by Chelsea. – New York. 1949).

92. Hildenbrand, J. Numerical computation of hypersingular integrals and application to the boundary integral equation for the stress tensor / J. Hildenbrand, G. Kuhn // Eng. Anal. Boundary Elements. – 1992. – V. 10. – P. 209 – 217.

93. Ioakimidis, N. I. Application of finite-part integrals to the singular integral equations of creck problems in plane and three-dimensional elasticity / N. I. Ioakimidis // Acta Mechanics. 1982. – V. 45. – P. 31 – 47.

94. Iakimidis, N. I. A direct method for the construction of Gaussian quadrature rules for the Cauchy type and the finite-type integrals / N. I. Ioakimidis // Mathematica Revue d'analyse Numerique et de theorie de l' approximation. L' analyse Numerique et le theory de L'approximation. 1983. T. 12. – № 2. – P. 131 – 140.

95. Ioakimidis, N. I. On the Uniform Convergence of Gaussian Quadrature Rules for the Cauchy Principal Value Integrals and Their Derivatives / N. I. Ioakimidis // Math. comp. – 1985. – V. 44. – P. 191 – 198.

96. Ioakimidis, N. I. On the numerical solution of singular integrodifferential equations / N. I. Ioakimidis, P. S. Theocaris // Quart. Appl. Math – 1979. – V. 37. – P. 325 – 331.

97. Kaya, A. C. On the solution of integral equations with strongly singular kernels / A. C. Kaya, E. Erdogan // Quatery of applied mathematics. – 1987. – V. 45. – № 1. – P. 105 – 122.

98. Kolm, P. Numerical quadratures for singular and hypersingular integrals / P. Kolm, V. Rokhlin // Computers and Mathematics with Applications. – 2001. – V. 41. – P. 327 – 352.

99. Krishnasamy, G. Hypersingular boundary integral equations: their occurrence, interpretation, regularization, and computation / G. Krishnasamy, F. J. Rizzo. T.J. Rudolhpi. - In: P. K. Nanerjee, S. Kobayashi (editors) Development in Boundary Element Methods, Volum 7, Appl. Sci. Publ., Barking, 1991.– P. 122 – 140.

100. Kutt, H. R. The numerical evaluation of principal value integrals by finite-part integration / H. R. Kutt // Numer. Math. – 1975. – V.24. – P. 205 – 210.

101. Linkov A. M. Complex hypersingular integrals and integral equations in plane elasticity / A. M. Linkov, S. C. Mogilevskaja // Acta Mechanics. – 1994. – V. 105. – P. 189 – 205.

102. Linz P. On the approximate computation of certain strongly singular integrals / P. Linz // Computing. – 1985. – V. 35. – P. 345 – 353.

103. Lutz, E. An overview of integration methods for hypersingular integrals / E. Lutz, L. J. Gray, A. R. Ingraffea . – In: C.A. Brebbia, G.S. Gipson (editors) Boundary Elements, vol. XIII, CMP, Southampton. – 1991. – P. 913 – 925.

104. Mason, J. C. Chebyshev Polynomial Method for Line Integrals with Singularietes / J. C. Mason, E. A. Venturino // Advances in Computational Mathematics.– 1998. – V. 10. – P. 187 – 208.

105. Monegato, G. On the weights of certain quadratures for the numerical evaluation of Cauchy principal value integrals and their derivatives / G. Monegato // Numerical Mathematics. – 1987. – V. 50. – P. 273 – 281.

106. Monegato, G. Numerical evaluation of hypersigular integrals / G. Monegato // Journal of Computational and Applied Mathematics. – 1994. – V. 50. – P. 9 – 31.

107. Monegato, G. The numerical evaluation of 2-D Caucty principal value integral arising in boundary integral equation methods / G. Monegato // Math. Comp. – 1994. – V. 62. – P. 765 – 777.

108. Monegato, G. Quadrature rules for Prandtl's integral equation / G. Monegato, V. Pennacchietti // Computating. – 1986. – V. 37. – P. 31 – 42.

109. Ninham, B. W. Generalized functions and divergent integrals / B. W. Ninham // Numer. Math. – 1966. – V. 8. – P. 444 – 457.

110. Ossicini, A. Alcune formule di quadratura per il calcolo della parte finita e del valore principale di integrali divergenti / A. Ossicini // Rend. Mat. – 1969. – V. 6. – №. 2. – P. 385 – 403.

111. Paget, D. F. A quadrature rule for finite-part integrals / D. F. Paget // BIT. – 1981. – V. 21. – P. 212 – 220.

112. Paget, D. F. The numerical evaluation of Hadamard finite-part integrals / D. F. Paget // Numer. Math. – 1981. – V. 36. – P. 447 – 453.

113. Singular Integrals in Boundary Element Methods. – V. Sladek, J. Sladek (editors) Southampton, Boston : CMP, 1998. – 425 p.

114. Stellier, A. Asymptotic expansions of a class of integrals / A. Stellier // Proc. R. Soc. Lond. 1994. – Seria A. – V. 445. – P. 693 – 710.

115. Stenger, F. Numerical Methods Based on Whittaker Cardinal, or Sinc, Functions / F. Stenger // Siam. Rev. – 1981. – V. 23. – №. 2. – P. 165 – 224.

116. Tanaka, M. Regularization technique applied to boundary element methods / M. Tanaka, V. Sladek, J. Sladek // Appl. Mech. Rev. – 1994. – V. 47. – P. 457 – 499.

117. Wong R. Asymptotic approximation of integrals / R. Wong . – Boston : Academic Press, 1989. – 234 p.